
This is the **published version** of the article:

Pérez Pérez, Carla; Badillo Jiménez, Edelmira Rosa, tut.; Couso, Digna, tut.
Canvis en la caracterització de bones activitats matemàtiques en un context de
desenvolupament professional per a mestres de primària. Bellaterra: setembre
2019.

This version is available at <https://ddd.uab.cat/record/226855>

under the terms of the  license



Universitat Autònoma de Barcelona

TREBALL DE FINAL DE MÀSTER

MÀSTER DE RECERCA EN EDUCACIÓ
ESPECIALITAT: EDUCACIÓ CIENTÍFICA I MATEMÀTICA

**Canvis en la caracterització de bones activitats
matemàtiques en un context de desenvolupament
professional per a mestres de primària**

Nom de l'autora: **CARLA PÉREZ PÉREZ**

Nom de les tutores: **DRA. EDELMIRA BADILLO JIMÉNEZ
DRA. DIGNA COUSO LAGARÓN**

**Departament de Didàctica de la Matemàtica i
de les Ciències Experimentals**

Bellaterra, Setembre de 2019

Agraïments

En primer lloc, vull agrair a les meves dues tutores la confiança i les oportunitats brindades; he pogut aprendre moltíssim de vosaltres. Digna, gràcies per fer-me descobrir tant el món STEAM com el de la recerca i per obrir-me les portes CRECIM, on he pogut adquirir una visió de la recerca molt més àmplia i realista. Edelmira, admiro la teva manera de fer classes i la teva passió pel que fas. Realment t'has convertit en la meva referent de mestra de matemàtiques i m'has demostrat l'autèntica connexió entre la recerca i l'ensenyament.

En segon lloc, estic molt contenta d'haver conegut gent tan interessant i sorprenent aquest any, com les meves companyes del CRECIM i del màster. A tota la gent del CRECIM us vull donar les gràcies per obrir-vos a mi i mostrar-me tot el que feu. He pogut descobrir projectes molt interessants i he après molt de vosaltres. Estic segura que ens tornarem a trobar. A totes les meves companyes del màster us vull donar les gràcies, sobretot, per fer molt més amè i alegre aquest camí. Me'n porto de cadascuna de vosaltres una cosa única, sou una barreja entre experiència, saviesa i amor. Ha estat un luxe poder avançar juntes en aquesta etapa.

En tercer lloc, estic molt agraïda a les mestres participants en aquesta recerca, per tota la vostra col·laboració i interès.

En quart lloc, vull donar les gràcies al meu pare i a la meva mare. Sempre m'heu donat suport per arribar on he volgut i la vostra confiança i els vostres ànims han estat essencials per aconseguir-ho.

Per últim, agraeixo infinitament a la Moni i al Civit el fet de ser-hi sempre. M'atreviria a dir que heu seguit gairebé tot el procés d'aquest treball. Totes les il·lusions, els dubtes i les frustracions les he compartit amb vosaltres. Moni, gràcies per l'escolta activa, la comprensió que mai falla i la desconexió que m'has donat. Civit, gràcies per la paciència, l'energia positiva i la calma. La vostra empenta ha estat essencial per arribar fins aquí, sou els millors!

Índex

Introducció.....	3
1. Antecedents i justificació de la investigació	5
2. Marc teòric.....	7
2.1. Desenvolupament professional.....	7
2.1.1. Entorns formatius dirigits a afavorir el desenvolupament professional en matemàtiques	9
2.2. Bona activitat matemàtica	12
3. La pregunta i els objectius de la recerca	16
4. Metodologia de la recerca	17
4.1. Metodologia seguida per a l'objectiu 1	17
4.1.1. Estratègia d'anàlisi de dades	17
4.2. Metodologia seguida per a l'objectiu 2	24
4.2.1. Context de la recerca.....	24
4.2.2. Pla de recollida de dades	26
4.2.3. Instruments i estratègies de recollida de dades.....	27
4.2.4. Estratègia d'anàlisi de dades	30
4.2.5. Consideracions ètiques	36
5. Resultats i discussió	37
5.1. Resultats objectiu 1	37
5.2. Resultats objectiu 2.....	40
6. Conclusions i limitacions de la recerca	48
Bibliografia.....	51
Annexos	53
Annex 1. Qüestionari moment 1.....	53
Annex 2. Qüestionari moment 2.....	58
Annex 3. Dades del moment 4 per cada indicador	62
Annex 4. Evolució de cada indicador en els 4 moments.....	69

Introducció

Durant les últimes dècades ha crescut l'interès per a investigar sobre el docent de matemàtiques com un factor clau per a la millora de l'educació. Sobretot, s'ha investigat sobre quins coneixements i competències ha de tenir i sobre la necessitat que aquestes es vagin actualitzant, a través de la participació en experiències de desenvolupament professional. Gràcies a aquesta professionalització docent es poden generar canvis en les pràctiques d'aula que permeten millorar l'ensenyament i, consegüentment, l'aprenentatge de l'alumnat.

És en aquesta línia d'investigació de la Didàctica de les Matemàtiques que té sentit aquesta recerca, la qual pertany a un treball de final de màster. Es pretén aprofundir en una experiència de desenvolupament professional de mestres de primària en actiu i identificar canvis en el coneixement i la competència professional docent d'aquestes mestres, concretament, en la caracterització de bones activitats matemàtiques. Per a poder analitzar aquests canvis, prèviament s'han hagut de produir i validar indicadors d'una bona activitat matemàtica, els quals n'exposen les característiques principals.

El treball s'estructura en sis apartats i els annexos. Tot seguit d'aquesta introducció, es descriuen els antecedents i la justificació de la investigació. En l'apartat següent, s'exposa el marc teòric que la sustenta; el desenvolupament professional i les bones activitats matemàtiques. A continuació, es presenten la pregunta i els objectius d'aquesta recerca, basats en el marc teòric recentment esmentat, els quals guien la investigació. En quart lloc, s'explicita el marc metodològic que s'ha dut a terme, posant especial èmfasi en el context de la recerca i en el pla, els instruments i les estratègies de la recollida de dades. Després, es presenten i es discuteixen els resultats obtinguts d'aquesta recerca, desgranats per cada objectiu. Posteriorment, s'exposen les conclusions trobades, amb els seus respectius suggeriments i, també, les limitacions. Per últim, es mencionen totes aquelles referències bibliogràfiques que s'han utilitzat per a l'elaboració d'aquest treball.

Cal aclarir que, per fer ús d'un llenguatge no sexista, en la mesura del possible s'han inclòs expressions invariables, genèriques, neutres o despersonalitzades per a fer referència a un grup que pot incloure persones de sexes o gèneres diferents, per exemple: l'alumnat, el professorat, els docents. En alguns casos també s'han utilitzat formes dobles; com ara: els i les alumnes, sempre que no han dificultat la lectura del text. En els casos en què s'ha volgut fer referència a mestres dels dos sexes, s'ha utilitzat sempre la forma corresponent al gènere femení amb valor genèric, pel fet que és una professió en què predominen les dones. Per a fer referència a una persona concreta, sempre s'ha utilitzat la forma masculina o femenina d'acord amb el sexe d'aquesta persona.

1. Antecedents i justificació de la investigació

És evident que l'educació està en canvi. L'educació tradicional està essent cada vegada més substituïda per una educació adaptada al segle XXI. Aquest fet significa que s'estan reemplaçant els llibres de text per activitats que permetin als alumnes desenvolupar competències per a la vida. No obstant això, dissenyar bones activitats és una feina complexa que les mestres van aconseguint a mesura que es desenvolupen professionalment.

Primerament, en la formació inicial que es dona a la universitat, on s'incideix en les diferents didàctiques en què s'hauran de professionalitzar. No obstant això, les que seran mestres generalistes acaben fent només una pinzellada de les didàctiques de totes aquelles matèries les quals hauran d'ensenyar. A més, és molt difícil que tinguin un bon domini del contingut base de totes elles, inclús hi ha mestres que li tenen cert respecte a algunes matèries, com ara les matemàtiques, per la qual cosa encara es fa més difícil la tasca de dissenyar bones activitats i més fàcil el fet que s'acabi recorrent al llibre de text. Per aquest motiu és molt important també la formació permanent, on cada mestra pugui decidir quins coneixements i competències ha de seguir desenvolupant, les quals acabaran tenint incidència també en l'aprenentatge dels seus alumnes. A part, hi ha força mestres que van estudiar fa molts anys i que, si no fos per aquest desenvolupament professional constant i permanent, quedarien desactualitzades.

Almenys jo, com a mestra de primària, em sento identificada amb aquest fet. Durant el grau, vaig obrir els ulls i vaig sentir aquesta necessitat de canvi i millora de l'educació. No obstant això, vaig sortir amb incertesa respecte com poder dissenyar bones activitats en cadascuna de les matèries. En el meu cas particular, sempre m'han interessat especialment les matemàtiques i les ciències, per la qual cosa sobretot m'interessava saber com dissenyar bones activitats matemàtiques i científiques. Així doncs, vaig poder gaudir de l'últim any del grau, dedicant-me exclusivament a aquestes dues didàctiques. Vaig poder aprendre moltíssim, però a la vegada sentia que els meus companys que no estaven fent aquesta especialitat no s'haurien d'estar perdent aquesta

formació, d'igual manera que em devia estar passant amb mi amb la d'altres didàctiques. En acabar el grau, vaig sentir que encara necessitava seguir ampliant els meus coneixements i va ser quan vaig voler seguir formant-me professionalment i vaig iniciar el món de la recerca, concretament, en la didàctica de les matemàtiques i les ciències.

Aleshores, quan en el marc del TFM se'm va proposar, d'entre diverses opcions, l'oportunitat de submergir-me en un context de desenvolupament professional en matemàtiques de mestres de primària, perquè havien decidit deixar enrere el llibre de text i necessitaven eines per aprendre a fer bones activitats matemàtiques, em va semblar la millor opció. Per una banda, intuïnt la importància del desenvolupament professional, volia conèixer quin tipus d'experiències afavoreixen que les mestres puguin millorar i, a la vegada, comprovar quin impacte tenen, és a dir, quins canvis aconseguixen produir. Per altra banda, és un tema proper als meus interessos i preocupacions, del qual estava convençuda que em permetria aprendre molt, sobretot, a identificar i dissenyar bones activitats matemàtiques. Així doncs, veient que era un tema que m'ajudaria a seguir desenvolupant-me professionalment, tant com a mestra com a investigadora, vaig decidir endinsar-me en aquest context i investigar **quins canvis es produeixen en la caracterització de bones activitats matemàtiques en un context de desenvolupament professional per a mestres de primària.**

2. Marc teòric

2.1. *Desenvolupament professional*

Les mestres de matemàtiques tenen un coneixement i una competència professional particular i específica, que els permet veure les situacions d'ensenyament-aprenentatge de manera diferent a la resta i, consegüentment, tenir èxit en l'ensenyament de les matemàtiques (Ponte, 2012; Llinares, 2012 i 2013).

Diverses investigacions senyalen que tenir un bon coneixement del contingut, així com un bon coneixement pedagògic o didàctic general, són condicions necessàries, però no suficients, perquè la mestra de matemàtiques pugui promoure la construcció de coneixement matemàtic de manera connectada i robusta (Llinares, 2012; 2013; Badillo, 2019). Així doncs, el coneixement professional del professorat de matemàtiques inclou més aspectes. Gairebé tots els estudis fets tenen el seu origen en les aportacions de Shulman (1987), el qual proposa que el coneixement base d'una mestra està format per: (1) el coneixement del contingut, (2) el coneixement didàctic general, (3) el coneixement del currículum, (4) el coneixement didàctic del contingut, (5) el coneixement dels alumnes i les seves característiques, (6) el coneixement dels contextos educatius i (7) el coneixement dels objectius, les finalitats i els valors educatius, i dels seus fonaments filosòfics i històrics.

En especial, Shulman (1987) expressa la importància i l'interès del coneixement didàctic del contingut, el qual representa la barreja entre matèria i didàctica per la qual s'arriba a una comprensió de com determinats temes i problemes s'organitzen, es presenten i s'adapten als diversos interessos i capacitats dels alumnes i s'exposen per al seu ensenyament. Aquest fet implica que no és suficient entendre un contingut per a poder-lo ensenyar, sinó que s'espera que una mestra entengui el que ensenya, que ho compregui críticament, que identifiqui les idees i les destreses rellevants de l'àmbit i, si és possible, que ho sàpiga veure des de diferents punts de vista i sàpiga relacionar aquestes idees i destreses, tant dins de les matemàtiques com amb

altres matèries. És a dir, la mestra no ha de comprendre aquestes idees matemàtiques per a si mateixa, sinó per a ensenyar-les a un altre; ha de transformar-les per fer-les assequibles i comprensibles per als alumnes. Per tant, les mestres estan involucrades en uns processos de raonament i acció pedagògics, els quals formen un cicle: comprendre, transformar, ensenyar, avaluar i reflexionar (Shulman, 1987).

Aquest coneixement professional del professorat està, per sobre de tot, orientat a una activitat pràctica, i la manera per aconseguir-ho és que les mestres aprenguin a "mirar amb sentit", mitjançant l'ús del coneixement en la pràctica (Ponte, 2012; Llinares, 2012 i 2013). Aquest coneixement en ús configura la competència docent de mirar professionalment les situacions d'ensenyament-aprenentatge de les matemàtiques, la qual permet que les mestres puguin identificar els elements matemàtics implícits en la situació, interpretar la comprensió dels alumnes que participen en la situació i actuar/decidir/fer amb el propòsit de millorar la comprensió dels alumnes (Badillo, 2019). És una competència rellevant per al professor de matemàtiques, la qual no és innata, sinó que es desenvolupa en el transcurs del temps (Llinares, 2013; Fortuny i Rodríguez, 2012). Per aquest motiu, el desenvolupament professional de les mestres pren una gran importància.

El desenvolupament professional en matemàtiques és un procés de creixement en els aspectes que capaciten al professor per millorar l'ensenyament i l'aprenentatge dels seus estudiants, com són coneixements matemàtics i didàctics, gestió de l'aula i del coneixement. Creixement que pot ser impulsat per la formació, la reflexió sobre la pràctica i la relació amb la comunitat (Moreno, 2017; Badillo, Moreno i Planas, 2015).

Ponte (2012) posa especial èmfasi en el fet que el desenvolupament professional és contrari a les formacions tradicionals en què el professorat és considerat un objecte i s'espera que assimili els coneixements i la informació que li és transmesa, vist com un moviment "des de fora cap a dins". El desenvolupament professional tendeix a considerar teoria i pràctica de forma integrada. Representa un moviment "des de dins cap a fora", on el professorat passa a ser el subjecte de la formació i s'espera d'ell que decideixi sobre les

qüestions a considerar, els projectes a emprendre i la manera de dur-los a terme. No obstant això, no hi ha una incompatibilitat entre ambdues, ja que hi poden haver formacions dirigides a afavorir el desenvolupament professional del professorat, les quals atenguin les necessitats i objectius de realització de les mestres i permetin que progressin en la seva professió, construint tant coneixements com competències professionals.

2.1.1. Entorns formatius dirigits a afavorir el desenvolupament professional en matemàtiques

La finalitat d'aquests entorns és que les mestres puguin desenvolupar-se professionalment. Per tant, han de permetre que construeixin coneixements i competències professionals.

Pel que fa als coneixements, reprenent la proposta de Shulman (1987) del coneixement base d'una mestra, aquells que es poden desenvolupar en una intervenció formativa en matemàtiques i que són d'especial rellevància són el coneixement del contingut, el coneixement didàctic del contingut i el coneixement del currículum (Badillo, 2019). Els altres coneixements tenen aspectes que poden quedar inclosos en aquests i d'altres que no es poden desenvolupar, ja que no depenen tant de la matemàtica, sinó que són específics i propis del context del centre.

En primer lloc, per coneixement del contingut podem entendre el coneixement de les matemàtiques i de la seva organització. Això implica que no és suficient conèixer els tòpics o conceptes matemàtics, sinó que s'han d'entendre les relacions bàsiques entre aquests conceptes, així com els principis que permeten establir la validesa dels raonaments en matemàtiques. Per tant, aquest coneixement inclou els continguts i estructures pròpies de la matèria i implica saber quins coneixements matemàtics són clau i perquè i el que és cert i vàlid en cada etapa de l'escolaritat.

En segon lloc, el coneixement didàctic del contingut es refereix als coneixements sobre com s'ensenyen i s'aprenen les matemàtiques. Pel que fa a l'ensenyament, inclou el coneixement de les representacions més útils per presentar una idea, les millors analogies, il·lustracions i exemples, o les

demostracions que ajuden a presentar un concepte de manera coherent. Quant a l'aprenentatge, inclou un coneixement dels coneixements previs dels alumnes a edats determinades, els errors més comuns que cometien aquests alumnes o les estratègies que permetran als estudiants organitzar d'una manera més sòlida el coneixement matemàtic. Així doncs, s'ha de saber què fer quan un aprenentatge és difícil o fàcil, com gestionar les idees prèvies i els errors d'estudiants, etc.

En tercer lloc, el coneixement curricular és el que està relacionat amb l'organització de l'ensenyament i permet al professorat un domini dels materials i dels programes que serveixen com a eines per a la pràctica docent i que constitueixen les circumstàncies contextuais que facilitaran o inhibiran les iniciatives d'ensenyament. Aquest tipus de coneixement permet al professorat una organització horitzontal i vertical de continguts relatius a un nivell escolar. Per organització horitzontal s'entén l'habilitat per relacionar el contingut en diferents matèries o en diferents temes d'una matèria. L'organització vertical inclou l'habilitat per relacionar un tema amb coneixements de cursos precedents i posteriors.

L'ús d'aquest coneixement en la pràctica professional és el que permet que es desenvolupi la competència docent mirar professionalment les situacions d'ensenyament i aprenentatge de les matemàtiques (Llinares, 2013). Gràcies a aquesta competència docent, les mestres poden identificar elements matemàtics implícits d'una situació, interpretar la comprensió o pensament matemàtic dels alumnes que participen en aquesta situació i prendre decisions d'acció amb el propòsit de millorar la comprensió dels alumnes (Badillo, 2019).

Prenent com a focus i nucli d'actuació el desenvolupament de la competència docent mirar professionalment, hi ha diversos estudis que han aportat característiques dels entorns d'aprenentatge i de les activitats professionals en què es poden concretar els programes formatius de mestres de primària (Llinares, 2012, 2013; Fernández, Sánchez-Matamoros, Moreno i Callejo, 2018). Algunes d'aquestes activitats professionals són: (1) l'anàlisi de respostes d'alumnes a problemes amb diferents graus de comprensió, (2) el visionament

de vídeo-episodis de classe, (3) la lectura de documents amb informació teòrica que proporcionin a les mestres referents per a identificar els aspectes matemàtics rellevants i les dotin d'instruments per a la seva interpretació, (4) l'ús de contextos d'interacció entre les mestres i (5) la facilitació d'un recurs que guiï a les mestres en l'anàlisi del registre de la pràctica, de manera sistematitzada i organitzada, el qual reculli les destreses que articulen la competència docent (identificar, interpretar i prendre decisions).

ESTRATÈGIES PER A AFAVORIR EL DESENVOLUPAMENT PROFESSIONAL

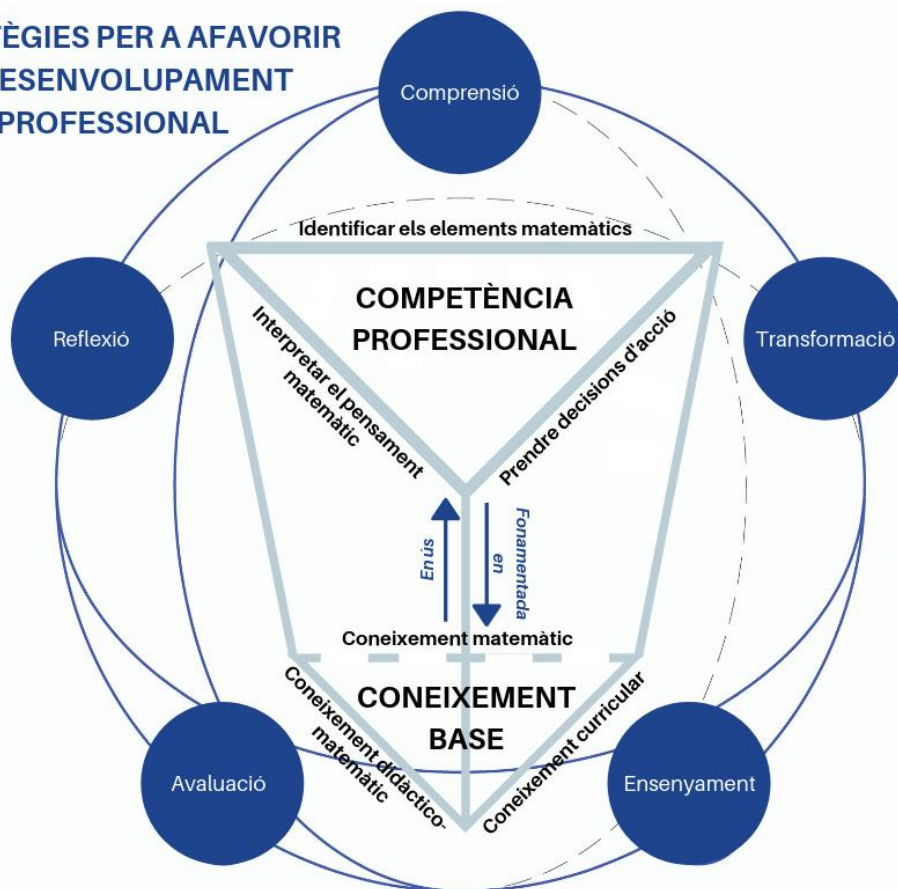


Figura 1. Ú[• • ã à | ^ Á ^ • c ! ~ & c ~ ! æ Á Á à q ~ } Á ^ } c [! p a ñ e n t p r o f e s s i o n a l . Á à ã ! ã * ã c Á æ .

Així doncs, tal com podem veure a la *Figura 1*, un possible entorn formatiu que busqui afavorir el desenvolupament professional requerirà l'ús del coneixement matemàtic, didàctic-matemàtic i curricular (base del prisma triangular) per tal que es desenvolupi la competència docent mirar professionalment situacions d'ensenyament i aprenentatge de les matemàtiques, la qual requereix les destreses mostrades a la part superior del prisma triangular. A més, l'esfera

que circumscriu el prisma, indica quines estratègies es poden utilitzar, basades en els processos de raonament i acció pedagògics de Shulman (1987), els quals suposen l'existència d'un cicle a través d'activitats de comprensió, transformació, ensenyament, avaluació i reflexió:

1. *Comprensió*: Les mestres han de comprendre les idees matemàtiques més importants, per tal que entenguin allò que ensenyen i, quan sigui possible, que ho facin de diferents maneres. També han de comprendre la manera en què una determinada idea es relaciona amb altres idees, tant de l'interior de la mateixa matèria, com d'altres matèries. A més, han de pensar com poden entendre aquestes mateixes idees els seus alumnes.
2. *Transformació*: Les mestres han de transformar les idees compreses per tal que els alumnes les puguin comprendre. Així doncs, han de preparar l'activitat matemàtica, analitzar les idees centrals i identificar les maneres de representar-les, seccionar la manera d'ensenyar i organitzar i, també, adaptar i ajustar les idees a les característiques dels alumnes.
3. *Ensenyament*: Les mestres han de realitzar l'activitat matemàtica amb els alumnes.
4. *Avaluació*: Les mestres han de verificar la comprensió dels alumnes, tant durant l'activitat interactiva com en acabar-la, i avaluar la seva pròpia pràctica i l'adaptació a les experiències.
5. *Reflexió*: Les mestres han de revisar, reconstruir, representar i analitzar críticament la seva pràctica i la de la classe i fonamentar les explicacions en evidències. Permet aprendre de l'experiència.

2.2. Bona activitat matemàtica

L'any 1991, el Consell Nacional de Professors de Matemàtiques (NCTM) va incorporar als estàndards per a l'ensenyament i l'aprenentatge de les matemàtiques la idea que la naturalesa de les tasques a les quals estan

exposades els alumnes determina el que aprenen. Les tasques són les situacions que el professor proposa (problema, investigació, exercici, etc.) a l'alumnat. Aquestes són el punt de partida de l'activitat de l'alumne/a, qui, al seu torn, produeix com a resultat el seu aprenentatge (Pochulu, Font, Rodríguez, 2016). Lappan i Briars (citats per Boston i Smith, 2011) afegeixen que la selecció de tasques és una de les decisions més importants que fa una mestra, ja que les tasques influeixen en les percepcions i oportunitats dels estudiants per aprendre matemàtiques.

No obstant això, a part de la naturalesa de les tasques, també és important la manera en què s'implementen, ja que estan situades en interaccions d'ensenyament-aprenentatge. Ambdós factors influeixen significativament en les oportunitats dels estudiants per aprendre matemàtiques. Les decisions que pren la mestra, tant en la planificació com en l'acció, poden marcar una diferència considerable en la manera com es fa la tasca, el nivell de persistència que mostra l'alumnat i l'aprenentatge resultant; cognitiu i afectivament (Boston, 2013; Clarke et al., 2014; Creamat, 2014). Arcavi (1999) també defensa aquesta idea, ja que diu que és el docent de l'aula qui conclou el que s'ha iniciat en el disseny, orquestrant una classe on es promogui la construcció de coneixement, d'acord amb l'esperit en què ha estat dissenyada i planificada l'activitat.

Així doncs, vist la rellevància que tenen les activitats matemàtiques -anomenades així perquè creiem que és el terme que engloba tant la seva naturalesa com la seva implementació- per l'aprenentatge dels estudiants, és important considerar que les mestres no poden reduir la presa de decisions sobre quina activitat desenvolupar atenent només l'aplicació acrítica dels plantejaments que ofereix el text (Albarracín et. Al, 2018), sinó que han de poder identificar i dissenyar bones activitats matemàtiques. Segons el diccionari d'Institut d'Estudis Catalans, "bona" significa que és adequada a un fi assenyalat o proposat i/o reporta utilitat, satisfacció, benefici i avantatges. Conseqüentment, es podria definir que una "bona activitat matemàtica" és aquella que respon als objectius plantejats per la mestra i permet que l'alumnat pugui tenir les màximes oportunitats possibles d'aprendre matemàtiques. Però, què caracteritza una bona activitat matemàtica?

Smith i Stein (1998) defensen que és essencial que una activitat tingui el potencial de fer que els alumnes s'involucrin en un pensament i raonament d'alt-nivell i, per tant, ha de requerir una alta demanda cognitiva. Aquesta característica també és contemplada per molts altres estudis, els quals exposen que el nivell de demanda cognitiva d'una activitat reflecteix el nivell dels processos cognitius necessaris per completar-la amb èxit i que és el grau en què els estudiants tenen oportunitats d'afrontar i donar sentit a idees importants i al seu ús (Clarke et al., 2014; Boston, 2013; Schoenfeld, 2016). De manera molt similar, Sullivan et al. (citats per Clarke et al., 2014) defensen que les tasques han de ser desafiantes, ja que l'alumnat aprèn millor quan és desafiat de maneres que proporcionen espai i suport per al creixement, amb una dificultat de treball que va des de moderat a exigent.

Altres investigacions com Broomes (citats per Planas i Alsina, 2009), Schoenfeld (2016) o Godino, Batanero, Font (2008), també contemplen la demanda cognitiva, però han trobat que també són necessàries altres característiques. Per exemple, Schoenfeld (2016) parla sobre l'ensenyament per a una comprensió robusta i identifica que, perquè sigui de qualitat, és necessari oferir oportunitats als estudiants en cinc dimensions: el contingut, la demanda cognitiva, l'accés equitatiu al contingut, la voluntat, propietat i identitat i l'avaluació formativa. L'aportació de Godino, Batanero, Font (2008), recolzada per altres treballs en la mateixa direcció com el de Pochulu, Font, Rodríguez (2016) també ha estat molt important. Parlen de la noció d'idoneïtat didàctica i que, aquesta, només pot ser possible si en el procés d'ensenyament-aprenentatge s'integren la idoneïtat epistèmica (grau de representativitat dels significats pretesos), la cognitiva (grau en què els significats pretesos estan en la zona de desenvolupament potencial), la interaccional (grau d'identificació i solució de conflictes), la mediacional (grau de disponibilitat i adequació dels recursos materials i temporals necessaris), l'emocional (grau d'implicació de l'alumnat) i l'ecològica (grau d'ajust amb l'entorn).

A part, és necessari tenir en compte que el currículum actual de Catalunya treballa per competències, per la qual cosa, una altra característica important és que les activitats permetin desenvolupar les competències dels estudiants. Per tant, han de requerir que l'alumnat apliqui i faci ús dels coneixements

matemàtics en una varietat de contextos. D'aquesta manera els alumnes seran capaços d'interactuar amb l'entorn i la societat, cada vegada més diversa i interconnectada, i podran interpretar els fenòmens del món (Albarracín et al., 2018). Per aconseguir-ho, el CREAMAT (2014), és a dir, el Centre de Recursos per Ensenyar i Aprendre Matemàtiques, pertanyent al CESIRE, proposa unes preguntes que poden servir d'indicadors del nivell de riquesa competencial d'una activitat.

A tall de recapitulació, hi ha diferents marcs que permeten caracteritzar que és una bona activitat matemàtica (veure *Figura 2*), encara que cada autor/a ho denomini d'una manera diferent, segons on posi el focus i quin adjectiu cregui que és el més adequat. Nosaltres hem considerat utilitzar l'adjectiu “bones”, pel seu significat esmentat anteriorment i perquè creiem que és l'adjectiu més habitual i recurrent a les aules i, per tant, el que pot ser més significatiu per les mestres i produir menys confusions. Aquesta caracterització de les bones activitats matemàtiques és important, ja que permetrà que les mestres puguin prendre decisions per promoure i aprofitar les oportunitats d'aprenentatge a l'aula i, en conseqüència, que els i les alumnes puguin construir significats i desenvolupar les competències desitjades.

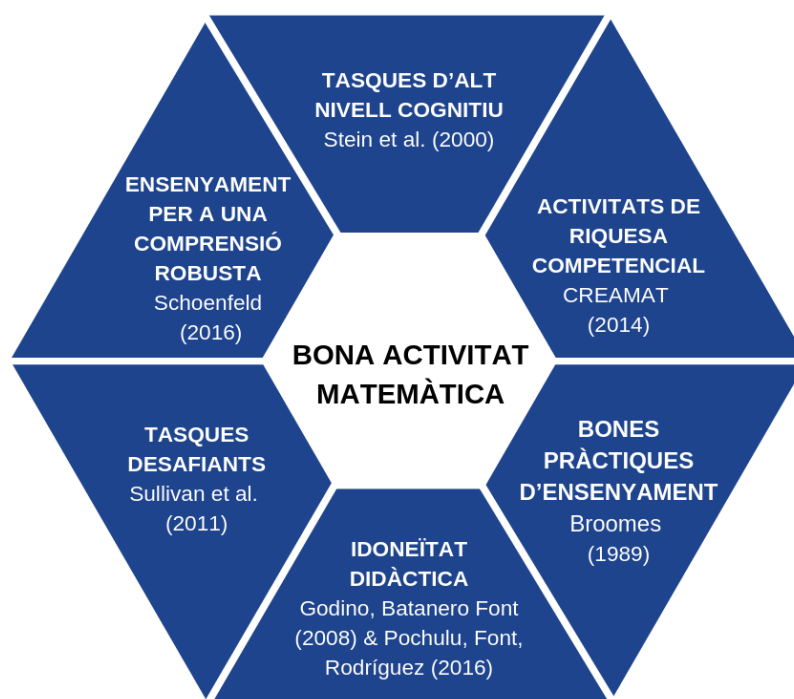


Figura 2

3. La pregunta i els objectius de la recerca

La pregunta que guia la investigació és la següent:

Ei j b g ' WU b j j g ' g Ð \ U l a c a r a c t e r i z a c i ó d e b o n e s a c t i v i d a t s a U h Y a { h j e i Y g ' X Y ' ` Y g ' a Y g h f Y g ' X Y ' W j W ` Y ' j b j W j X Ð i b U ' Z c o m e n t a r i a e l d e s e n v o l u p a m e n t p r o f e s s i o n a l ?

Es concreta en aquests objectius:

1. Produir i validar indicadors d'una bona activitat matemàtica.
2. Identificar els canvis que s'han produït en les mestres respecte a la caracterització de bones activitats matemàtiques al llarg d'una formació que busca el desenvolupament professional.

4. Metodologia de la recerca

Aquesta recerca és qualitativa i s'emmarca en un paradigma interpretatiu. Algunes de les característiques que ho justifiquen, segons Tejada (2017), són que considero que la realitat és múltiple, holística, dinàmica i interactiva, dotada de significat social i cultural, i m'interessa comprendre-la i interpretar-la. Per poder comprendre aquesta realitat, m'he submergit en ella. Juntament amb les mestres, també he participat en la formació, la qual cosa m'ha donat una perspectiva des de dins que m'ha permès veure com s'han desenvolupat al llarg de les sessions. A més, també he seguit el procés d'elaboració de la formació i he tingut l'oportunitat de poder participar en algunes decisions. Aquest fet ha facilitat que compregui com intenta donar resposta a les demandes de les mestres. Així doncs, el meu paper en la investigació ha estat d'observadora-participant. Per altra banda, d'acord amb les característiques acabades d'esmentar, per comprendre de veritat aquesta realitat, els dissenys dels instruments i les tècniques de recollida de dades han estat flexibles i s'han anat configurant a mesura que s'han anat obtenint les dades.

4.1. A Y h c X c ` c [] U ' g Y [i] X U ' d Y f ' U ' ` Ð c V ^ Y Wh

4.1.1. Estratègia X Ð U b { `] g] ' X Y ' X U X Y g

Per a la producció dels indicadors d'una bona activitat matemàtica, s'ha fet una anàlisi del contingut de les dades extretes del marc teòric d'una bona activitat matemàtica (veure *Figura 2*). Concretament, s'ha fet una anàlisi comparativa dels diferents indicadors o característiques que ha definit cada autor/a, segons com creu que haurien de ser les activitats matemàtiques, la qual es pot veure a la *Taula 1*. Les primeres cinc columnes fan referència als marcs teòrics especificats en la primera fila i, l'última columna, fa referència als indicadors d'una bona activitat matemàtica que proposem nosaltres, fruit de la comparació de tots els marcs i de les característiques que n'extraïem de cadascun.

INDICADORS DE H5 GE I 9 G` 8 NIVELL COGNITIU <i>Font: Smith i Stein (1998) i Boston (2013)</i>	INDICADORS 8 D 5 7 H = J = H 8 D 5 @H` B = J COMPTENECIAL <i>Font: CREAMAT (2014)</i>	INDICADORS DE BONES PRÀCTIQUES 8 D 9 B G 9 B M 5 A <i>Font: Broomes (1989) citat a Planas i Alsina (2009)</i>	INDICADORS 8 D 5 @H 5` IDONEITAT DIDÀCTICA <i>Fonts: Godino, Batanero i Font (2008) i Pochulu, Font i Rodríguez (2016)</i>	INDICADORS DE TASQUES DESAFIANTS <i>Font: Sullivan et al. (2011) citat a Clarke, Roche, Cheeseman, Van der Schans (2014)</i>	INDICADORS 8 D 9 B G 9 B M 5 A COMPETENT PER A UNA COMPRENSIÓ ROBUSTA <i>Font: Schoenfeld (2016)</i>	= B 8 = 7 5 8 C F G` 8 BONA ACTIVITAT MATEMÀTICA
<p>És ambigua, ja que admet diferents representacions, no una reproducció exacta. No hi ha un enfocament predictable o ben assajat o un camí suggerit explícitament per la tasca, les instruccions de la tasca o un exemple resolts.</p> <p>Requereix que els estudiants analitzin la tasca i examinin activament les restriccions que puguin limitar les possibles solucions i les estratègies de resolució.</p>	<p>Es pot desenvolupar de diferents formes.</p>	<p>És flexible.</p>	<p>No ha de ser tancada, és a dir, ha d'admetre més X D i b` WU a ±` de resolució i acceptar diferents h] d i g` X D U W matemàtica i estratègies en els alumnes. No brinda suggeriments possibles o resultats a aplicar ni es troba molt pautada, per tal de promoure processos rellevants com són la formulació de conjectures o la validació.</p>	<p>Requereix que els estudiants planifiquin el seu enfocament, especialment seqüenciant més d'un pas, i triïn les seves pròpies estratègies i objectius.</p> <p>Requereix que els estudiants ampliïn els seus coneixements i pensin de noves maneres.</p>	<p>Tasques que poden abordar-se de múltiples maneres o des de múltiples perspectives i en les quals els enfocaments es poden comparar i contrastar.</p>	<p>OBERTA: Ha de ser oberta, és a dir, ha d'admetre més X D i b` WU a ±` d c g g resolució i acceptar X] Z Y f Y b h g` h] d i matemàtica i estratègies en els alumnes. No brinda suggeriments possibles o resultats a aplicar ni es troba molt pautada, per tal que els estudiants planifiquin el seu enfocament i desenvolupin processos rellevants com són la formulació de conjectures o la validació.</p>
<p>Requereix un pensament complex i no algorítmic i, també, esforç cognitiu a causa de la naturalesa impredecible del</p>	<p>Té per objectiu respondre una pregunta. La pregunta pot referir-se a un context quotidià, pot emmarcar-se en un joc, pot tractar d'una</p>	<p>Suposa un repte per la majoria d'alumnes.</p>		<p>Requereix que els estudiants dediquin temps a la tasca.</p>	<p>És un repte, ja que permet que els alumnes participin en una "lluita productiva", afrontant conceptes difícils i problemes desafiants, però en</p>	<p>REPTE: Requereix un pensament complex i no algorítmic i suposa un repte per la majoria d'alumnes, ja que han d'afrontar conceptes difícils i problemes desafiants, però en un</p>

procés de solució requerit.	regularitat o fet matemàtic.				un nivell de desafiament favorable, on els estudiants tenen l'oportunitat de desenvolupar el que saben i ampliar els coneixements actuals. El mestre ha d'ajudar els estudiants a afrontar i persistir la resolució d'aquests, donant-los suport i recursos i deixant-los espai perquè donin sentit propi a les idees importants i al seu ús.	nivell de desafiament favorable on els estudiants tenen l'oportunitat de desenvolupar el que saben i ampliar els coneixements actuals . Per aquest motiu, és necessari un esforç cognitiu per part dels alumnes i, també, que dediquin temps a la tasca .
		Inclou una gradació de dificultats a partir de les possibilitats de cadascú d'ells, segons els diferents ritmes d'aprenentatge, permetent la seva expansió pels més ràpids.	Assegura que els alumnes tenen els coneixements previs necessaris per a l'estudi del tema; inclou activitats d'ampliació i de reforç.	Requereix que els estudiants triïn el nivell d'UW faga tasca.	Involucra a tots els estudiants , sense importar el grau de contingut. Proporciona múltiples punts d'UW i material rellevant, recolzant l'expectativa que tots els estudiants puguin i esperin participar.	GRADACIÓ DE DIFICULTATS: Parteix dels coneixements previs i inclou una gradació de dificultats a partir de les possibilitats de cadascú d'ells, segons els diferents ritmes d'aprenentatge. El fet que proporcioni a • h] d` Y g` d i b l fomenta que tots els estudiants puguin i esperin participar .
	Estimula la curiositat i la creativitat de l'alumnat.	Facilita la implicació de tots els alumnes, ja que permet l'establiment de connexions amb el context de fora de l'aula.	La tasca s'ha de basar en l'ús de situacions-problemes que siguin d' interès per als estudiants. Si es proposa en un context real, s'ha de procurar que sigui significatiu i rellevant .			CONTEXTUALITZACIÓ: Presenta un context significatiu i rellevant pels alumnes, que els provoca interès i/o curiositat i els permet connectar amb el context de fora de l'aula.

Es representa de diverses maneres (per exemple, diagrames visuals, manipulació, símbols, situacions problemàtiques). Fer connexions entre múltiples representacions ajuda a desenvolupar el significat.	Implica l'ús de diversos instruments com ara material que es pugui manipular, eines de dibuix, programari, calculadora, etc.		Grau de disponibilitat i adequació dels recursos materials i temporals necessaris per al desenvolupament del procés d'ensenyament-aprenentatge.		Ofereix un ventall de maneres perquè tots els estudiants puguin participar en el treball intel·lectual de la classe (parlar, escriure, donar-se suport, escoltar-se amb força, manipular símbols, fer diagrames, interpretar text, manipular, connectar idees diferents ...).	DIVERSITAT I PROGRESSIÓ DE REPRESENTACIONS I RECURSOS ADEQUATS: Inclou i/o es pot resoldre utilitzant diferents representacions (manipulació, diagrames visuals, símbols...), per tal que tots els estudiants puguin participar i desenvolupar nivells més profunds de comprensió. S'ha d'anar avançant de representacions més encatives/manipulatives, cap a representacions més abstractes/simbòliques. Fer connexions entre múltiples representacions ajuda a desenvolupar el significat. Per a aquest desenvolupament, es necessiten els recursos materials i temporals adequats .
L'atenció dels estudiants se centra en l'ús de procediments amb l'objectiu de desenvolupar nivells més profunds de comprensió de conceptes i idees matemàtiques .	G D U j U b , U ' Y representació de manera cada vegada més precisa i s'usa progressivament llenguatge matemàtic més acurat .					
Requereix que els estudiants accedeixin als coneixements i les experiències rellevants i que en facin un ús adequat per treballar la tasca.		Està relacionada amb el contingut curricular .	Assegurar que els continguts ensenyats es corresponen amb les directrius curriculars .	Requereix que els estudiants s'involucrïn amb idees matemàtiques importants .	Activitats a l'altura dels estàndards de la disciplina corresponent.	CONTINGUTS CLAU: Requereix que els estudiants s'involucrïn amb les idees o continguts matemàtics més importants , inclosos en el currículum. A més, ha d'involucrar els estudiants en actuacions autèntiques de pràctiques disciplinàries importants, anàlogues als processos dels matemàtics . Per exemple, raonar a partir d'evidències, comunicar el pensament d'un mateix, etc.
		Serveix com a introducció i motivació per a un contingut bàsic .	Invertir el temps en els continguts més importants o nuclears del tema.		Involucra els estudiants amb idees matemàtiques d'importància central d'una manera activa , de manera que puguin donar sentit a conceptes i idees	

					<p>per a ells mateixos i desenvolupar xarxes robustes de comprensió.</p> <p>Involucra els estudiants en actuacions autèntiques de pràctiques disciplinàries importants (p. ex. Raonar a partir d'evidències, comunicar el pensament d'un mateix a diversos públics, etc.).</p>	
<p>Implica connexió entre procediments i idees conceptuals subjacents perquè els estudiants puguin completar amb èxit la tasca i desenvolupar la comprensió.</p>	<p>Ajuda a relacionar coneixements diversos dins de la matemàtica o amb altres matèries.</p>	<p>Permet establir connexions entre diferents àrees del currículum dins o fora de les matemàtiques, amb la qual cosa amplia la imatge de les idees matemàtiques i desenvolupa significats.</p>	<p>Relacionar els continguts que s'ensenyen amb altres continguts matemàtics i d'altres disciplines.</p>	<p>Requereix que els estudiants processin múltiples peces d'informació, amb l'expectativa de fer connexions entre aquestes peces, i veure conceptes de noves maneres.</p>	<p>Recolzen connexions significatives entre procediments, conceptes i contextos (si escau), destacant les connexions entre habilitats i conceptes i relacionant conceptes entre ells.</p>	<p>CONNEXIÓ I APLICACIÓ DELS CONTINGUTS: Permet fer connexions entre continguts, de la a U h Y a { h] WU` c matèries, i aplicar-los a altres aprenentatges o a vivències no escolars.</p>
<p>Requereix que els estudiants explorin i compreguin la naturalesa dels conceptes, processos o relacions matemàtiques.</p>	<p>Porta a aplicar coneixements ja adquirits i a fer nous aprenentatges.</p>	<p>Afavoreix que l'alumne relacioni coneixements i els apliqui.</p> <p>Finalitza quan l'alumne és conscient dels seus aprenentatges, reflexionant, interioritzant, i relacionant aprenentatges anteriors i vivències no escolars.</p>				

	<p>Es posa en joc el treball i l'esforç individual, però també el treball en parelles o en grups que porta a parlar, argumentar, convèncer, consensuar, etc.</p> <p>Implica raonar sobre el que s'ha fet i justificar els resultats.</p>		<p>Requereix justificar les eleccions que realitzen els alumnes i, també, les que rebutgen. La raó és que es tracta de promoure un procés matemàtic rellevant com és el d'argumentació.</p>	<p>Requereix que els estudiants expliquin les seves estratègies i justifiquin el seu pensament al professor i als altres estudiants.</p>	<p>Dóna l'oportunitat que els estudiants generin i comparteixin les seves idees i raonaments. Les idees dels estudiants es construeixen a mesura que l'aula construeix la seva comprensió col·lectiva.</p>	<p>ARGUMENTACIÓ: Requereix que els estudiants expliquin les seves estratègies i justifiquin el seu pensament al mestre i als altres estudiants. Per aconseguir-ho, és important el treball en parelles o grups.</p>
	<p>S'intervé a partir de preguntes adequades més que amb explicacions.</p>		<p>Considerar moments d'anticipació dels errors i dificultats que tindrien els alumnes en enfrontar-se a la tasca per preveure intervencions docents apropiades i, també, reconèixer i resoldre els conflictes de significat dels alumnes que es produeixen durant el procés d'instrucció.</p>		<p>Provoquen el pensament dels estudiants i ens donen informació sobre les estratègies que utilitzen els estudiants i la profunditat de la seva comprensió. Les interaccions posteriors responen a aquestes idees, basant-se en principis productius i abordant els malentesos emergents. Una potent instrucció "troba on estan els estudiants" i els dóna oportunitats per aprofundir la seva comprensió.</p>	<p>; 9 GH = é ` 8 Ð 5 l @5` ANTICIPACIÓ DE CONTINGÈNCIES: Inclou una anticipació dels errors i dificultats dels alumnes en enfrontar-se a la tasca per preveure intervencions docents apropiades i, també, reconèixer i resoldre els conflictes de significat que es produeixen. Durant l'activitat, s'ha d'intervenir a partir de preguntes adequades, més que amb explicacions, i s'ha de trobar on estan els estudiants (quines estratègies utilitzen, quina profunditat de comprensió tenen...) per abordar els malentesos emergents i donar-los oportunitats per aprofundir en la seva comprensió.</p>

Requereix autocontrol i autoregulació dels propis processos cognitius.	Es fomenta l' autonomia i la iniciativa de l'alumnat.	Pretén la generació de bones preguntes .				PROMOCIÓ CULTURA FORMATIVA DE @D 5 J 5 @I :5 7 = é Promou una cultura formativa d'avaluació, ja que fomenta l' autonomia i la iniciativa de l'alumnat i permet l' autocontrol i l' autoregulació dels propis processos cognitius. Per aconseguir-ho, s'ha de X Y g d Y b U ` J h ni U f` considerar-la com una font d'aprenentatge i, també, empoderar als infants.
					Ofereixen als estudiants oportunitats per a construir una visió coherent i significativa de les matemàtiques . Permet que els estudiants es vegin a si mateixos i als altres com a poderosos pensadors i aprenents , no aportant-los èxits fàcils, sinó fent-los ser creadors de sentit, solucionadors de problemes i creadors d'idees significatives i importants.	VALORS, ACTITUDS, EMOCIONS I IDENTITATS D C G = H = J 9 G` 5` @E Ofereix als estudiants oportunitats per a construir una visió coherent, significativa i amb un valor positiu de les matemàtiques. Permet millorar l' autoeficàcia perquè es vegin a si mateixos i als altres com a poderosos pensadors i aprenents . A més, promou igual d' oportunitats per a tothom , independentment del gènere o la classe social.

Taula 1. Anàlisi comparatiu de la literatura sobre els indicadors o les característiques à q ~ } æ Á à [} æ Á æ & c ã ç ã c æ c Á { æ c ^ { e c ã & æ

Per a la validació dels indicadors de bona activitat matemàtica obtinguts, es va demanar l'opinió a experts. Concretament, a dos investigadors en didàctica de les matemàtiques; un de la Universitat de Barcelona i un de la Universitat Autònoma de Barcelona. També, a dos professors internacionals, investigadors en didàctica de les matemàtiques de la Universidad Austral de Chile. Les seves aportacions es van tenir en compte per a refinar els indicadors.

4.2. A Y h c X c ` c [] U ` g Y [i] X U ` d Y f ` U ` ` Ð c V ^ Y Wh

4.2.1. Context de la recerca

Participants

Els participants de la meua investigació han estat 4 mestres de cicle inicial d'Educació Primària d'una escola pública de l'àrea metropolitana de Barcelona, concretament, de Mollet del Vallès. Es va escollir fer la formació i, per tant, la investigació, en aquesta escola, pel fet de tenir un alt nivell d'acceptació i compromís amb la formació en l'àmbit de matemàtiques, l'existència de vincles previs com a escola formadora de pràctiques a la UAB i el nombre de docents interessats del claustre, entre d'altres. A més, la raó per la qual hem seleccionat les mestres de cicle inicial ha estat perquè són les que van començar a treballar matemàtiques aquest curs sense llibre i, consegüentment, les que van demanar la formació per a millorar en la identificació, disseny, gestió i avaluació de bones activitats matemàtiques. Així doncs, hem cregut d'especial interès posar el focus en elles.

La intervenció formativa

La intervenció formativa de la investigació s'ha contextualitzat en un curs oficial de 20 hores, gestionat pel CRP del Maresme i del Vallès Oriental (Servei Educatiu del Servei Territorial Maresme-Vallès Oriental).

L'ha dissenyat la formadora; l'Edelmira Badillo, i l'objectiu ha estat el desenvolupament professional de les mestres, per la qual cosa ha seguit el que s'exposa en la *Figura 1*. Concretament, ha buscat desenvolupar el coneixement matemàtic, didàctic-matemàtic i curricular i la competència professional docent

de “mirar amb sentit” les situacions d’ensenyament i aprenentatge de les matemàtiques, amb especial èmfasi a la destresa de prendre decisions en el disseny i la intervenció per tal de realitzar una bona activitat matemàtica. A més, ha seguit els processos de raonament i acció pedagògics proposats per Shulman (1987), però incloent classes model. Ha estructurat la formació en cinc fases i ha fet servir les següents estratègies (es pot consultar l’esquema en la *Figura 3*):

- ◁ *1a fase . comprensió*: La formadora realitza explicacions teòriques i facilita la lectura de documents teòrics. Les mestres resolen activitats com si fossin alumnes, analitzen els diferents nivells de comprensió que podrien tenir els alumnes i les idees i estratègies que els caracteritzen.
- ◁ *2a fase . observació participant de la classe model*: La formadora realitza una activitat amb nens i nenes de l’escola i les mestres l’observen, ja sigui en el mateix moment i/o mitjançant vídeo-episodis on es mostren moments rellevants de l’activitat.
- ◁ *3a fase . reflexió de la classe model*: Les mestres reflexionen sobre la classe model. Sobretot, sobre els elements matemàtics de l’activitat, les evidències de pensament matemàtic dels alumnes i el paper de la mestra en l’activitat matemàtica, posant èmfasi en la seva presa de decisions i en les bones preguntes que fa.
- ◁ *4a fase . transformació i ensenyament*: Les mestres fan una classe amb els seus alumnes, aplicant tot el que han après en la formació, i recullen evidències.
- ◁ *5a fase . avaluació i reflexió*: Les mestres avaluen l’activitat que han realitzat (l’activitat escollida, com s’ha portat a terme, la comprensió dels alumnes durant l’activitat i en finalitzar-la, etc.) amb la finalitat de reflexionar sobre si ha estat una bona activitat matemàtica, per tal de seguir millorant i aprenent. Posteriorment, la redissenyen tenint en compte els indicadors de bona activitat matemàtica (veure *Taula 4*).

La implementació d'aquestes fases s'ha realitzat en el context de dos continguts clau de la matemàtica escolar, inclosos en el currículum de primària: numeració i patrons. Les fases 1, 2 i 3 s'han repetit en dos cicles; el primer aplicat al contingut clau de numeració i, el segon, al de patrons. Les fases 4 i 5 s'han realitzat posteriorment i no han anat adreçades a cap contingut en concret, ja que les mestres han pogut decidir sobre quin contingut dissenyar, implementar i avaluar la seva activitat. A més, prèviament a les fases, s'ha fet una presentació de la formació, centrada en la mirada curricular de l'activitat matemàtica.










CICLES	INTRO-DUCCIÓ (Burgués i Sarraón, 2013)	NUMERACIÓ (van den Heuvel-Panhuizen, 2001)			PATRONS (Radford, 2011; Callejo i Zapatera, 2017)			NUMERACIÓ/PATRONS (Nrich, PuntMat, CREAMAT)		CLOENDA	
	2 sessions	3 sessions			2 sessions			2 sessions		2 sessions	
CONTEXT DE LA FORMACIÓ		FASE 1: COMPRESIÓ 	FASE 2: OBSERVACIÓ CLASSE MODEL 	FASE 3: REFLEXIÓ CLASSE MODEL 	FASE 1: COMPRESIÓ 	FASE 2: OBSERVACIÓ CLASSE MODEL 	FASE 3: REFLEXIÓ CLASSE MODEL 	FASE 4: TRANSFORMACIÓ I ENSENYAMENT 	FASE 5: AVALUACIÓ I REFLEXIÓ 	FASE 5: AVALUACIÓ I REFLEXIÓ 	
EINES DE LA FORMACIÓ	FORMADORA: Presentació formació i mirada curricular de l'activitat matemàtica	FORMADORA: - Explicacions teòriques - Facilitació documents teòrics MESTRES: - Resolució activitats - Anàlisi nivells comprensió, idees i estratègies	FORMADORA: - Realització classe model amb infants de l'escola MESTRES: - Observació classe model en directe i/o a través de video-episodis de moments rellevants	MESTRES: - Reflexió sobre els elements matemàtics, el pensament matemàtic dels alumnes i el rol de la mestra	FORMADORA: - Explicacions teòriques - Facilitació documents teòrics MESTRES: - Resolució activitats - Anàlisi nivells comprensió, idees i	FORMADORA: - Realització classe model amb infants de l'escola MESTRES: - Observació classe model en directe i/o a través de video-episodis de moments rellevants	MESTRES: - Reflexió sobre els elements matemàtics, el pensament matemàtic dels alumnes i el rol de la mestra	MESTRES: - Transformació d'idees per a la comprensió dels alumnes. - Disseny i realització d'una activitat matemàtica a l'aula i recull d'evidències.	MESTRES: - Avaluació de la pròpia activitat - Reflexió sobre si ha sigut una bona activitat matemàtica i com millorar-la.	FORMADORA: - Facilitació indicadors d'una bona activitat matemàtica MESTRES: - Redisseny de l'activitat atenent als indicadors.	MESTRES: - Valoració global formació: aspectes positius i a millorar. - Valoració per cicles

Figura 3. Ò • ~ ~ ^ { æ Á â ^ Á / q ^ • c / ~ & c ~ / æ Á â ^ Á / æ Á ã } c ^ / ç ^ } & â

4.2.2. Pla de recollida de dades

Per a la recollida de dades, vam tenir en compte quins moments de la formació podien ser rellevants per a la detecció de canvis en la caracterització de bones activitats i vam creure convenient recollir la informació en quatre moments clau (consultar esquema en la Figura 4):

- < *Moment 1 (M1):* A l'inici de la formació. És un moment interessant, ja que permet veure quins són els coneixements previs sobre bones activitats matemàtiques que tenen les mestres.
- < *Moment 2 (M2):* Després de les fases 1, 2 i 3 del primer cicle, en què ja hi ha hagut una primera reflexió sobre els elements matemàtics, el pensament matemàtic i el rol de la mestra en la classe model.

- ◁ **Moment 3 (M3):** Després de la fase 4, en què les mestres han seleccionat o dissenyat una activitat matemàtica i l'han portat a l'aula amb els seus alumnes. És un moment interessant, ja que pel disseny i la intervenció de la seva activitat, han hagut de reflexionar de nou sobre que caracteritza una bona activitat matemàtica per tal d'intentar que la seva ho sigui.
- ◁ **Moment 4 (M4):** Al final de la formació. És un moment rellevant, ja que permetrà saber quins coneixements han adquirit les mestres.

















CICLES	INTRO-DUCCIÓ (Burgués i Saramona, 2013)	NUMERACIÓ (van den Heuvel-Panhuizen, 2001)			PATRONS (Radford, 2011; Callejo i Zapatera, 2017)			NUMERACIÓ/PATRONS (Nrich, PunMat, CREAMAT)		CLOENDA	
	2 sessions	3 sessions			2 sessions			2 sessions		2 sessions	
CONTEXT DE LA FORMACIÓ		FASE 1: COMPRESIÓ 	FASE 2: OBSERVACIÓ CLASSE MODEL 	FASE 3: REFLEXIÓ CLASSE MODEL 	FASE 1: COMPRESIÓ 	FASE 2: OBSERVACIÓ CLASSE MODEL 	FASE 3: REFLEXIÓ CLASSE MODEL 	FASE 4: TRANSFORMACIÓ I ENSENYAMENT 	FASE 5: AVALUACIÓ I REFLEXIÓ 	FASE 5: AVALUACIÓ I REFLEXIÓ 	
EINES DE LA FORMACIÓ	FORMADORA: Presentació formació i mirada curricular de l'activitat matemàtica	FORMADORA: - Explicacions teòriques - Facilitació documents teòrics MESTRES: - Resolució activitats - Anàlisi nivells comprensió, idees i estratègies	FORMADORA: - Realització classe model amb infants de l'escola MESTRES: - Observació classe model en directe i/o a través de vídeo-episodis de moments rellevants	MESTRES: - Reflexió sobre els elements matemàtics, el pensament matemàtic dels alumnes i el rol de la mestra	FORMADORA: - Explicacions teòriques - Facilitació documents teòrics MESTRES: - Resolució activitats - Anàlisi nivells comprensió, idees i	FORMADORA: - Realització classe model amb infants de l'escola MESTRES: - Observació classe model en directe i/o a través de vídeo-episodis de moments rellevants	MESTRES: - Reflexió sobre els elements matemàtics, el pensament matemàtic dels alumnes i el rol de la mestra	MESTRES: - Transformació d'idees per a la comprensió dels alumnes. - Disseny i realització d'una activitat matemàtica a l'aula i recull d'evidències.	MESTRES: - Avaluació de la pròpia activitat - Reflexió sobre si ha sigut una bona activitat matemàtica i com millorar-la.	FORMADORA: - Facilitació indicadors d'una bona activitat matemàtica MESTRES: - Redisseny de l'activitat atenent als indicadors.	MESTRES: - Valoració global formació: aspectes positius i a millorar. - Valoració per cicles
EINES DE LA RECERCA		MOMENT 1 QÜESTIONARI 		REFLEXIONS 	MOMENT 2 QÜESTIONARI 		REFLEXIONS 		MOMENT 3 AUTO-AVALUACIÓ 	MOMENT 4 REDISSENY 	ENTREVISTA MESTRES 

Figura 4 Ò• ~ ^ { æÁ â ^ Á | q ^ • c ! ~ & c ~ ! æÁ â ^ Á | æÁ â } c ^ ! ç ^ } & ã 5 Á ~ [! { æ c ã ç æÉ / la recollida de dades.

4.2.3. Instruments i estratègies de recollida de dades

Per aconseguir identificar els canvis sobre la caracterització de bones activitats matemàtiques al llarg de la formació, vam considerar que hi havia d'haver un instrument que ens permetés recollir les dades de les mestres en els moments clau de la formació (especificats a l'apartat 4.2.2.). Encara que l'idea inicial era que aquest instrument fos el mateix per als quatre moments, ens vam veure obligades a utilitzar uns altres instruments en el M3 i el M4, per tal que tingués més sentit en la realitat d'aquests dos moments i amb la manera amb la qual s'estava duent a terme la formació. A més, podria haver resultat pesat i no efectiu el fet de recollir sempre les dades amb el mateix instrument. No obstant

això, tots tenen la mateixa finalitat: recollir quines característiques creuen les mestres que té una bona activitat matemàtica.

Qüestionaris

En el M1 i en el M2 vam decidir recollir les dades amb un qüestionari amb preguntes obertes. Per elaborar-lo, vam basar-nos en el de Boston (2013), qui defensa que una bona activitat ha de requerir un alt nivell de demanda cognitiva, tal com proposen Smith i Stein (1998). Per aquest motiu, el seu qüestionari està destinat a avaluar els canvis en el coneixement dels docents sobre les demandes cognitives de les tasques matemàtiques, on els demana que qualifiquin diverses tasques com a nivell “alt”, “baix”, o “no estic segur”, que ho justifiquin i que enumerin els seus criteris per a les tasques d'alt nivell. No obstant això, per nosaltres, una bona tasca requereix més característiques a part de l'alt nivell de demanda cognitiva, per tant, hem adaptat el qüestionari al nostre marc teòric de bona activitat matemàtica. El nostre qüestionari està dividit en tres parts principals.

La primera part és de dades personals, on es pregunta sobre el nom, l'experiència docent i el tipus d'activitats més freqüents en les seves classes de matemàtiques. Aquest apartat només apareix en el qüestionari del M1 (veure *Annex 1. Qüestionari moment 1*), en el del M2 (veure l'*Annex 2. Qüestionari moment 2*) només es demana el nom, per tal de poder fer el seguiment.

En la segona part es presenta alguna activitat matemàtica i es pregunta per què és bona. En el qüestionari del M1 es presenten dues activitats diferents i en el qüestionari del M2 només una, ja que vam intuir que en el primer qüestionari podria existir més bloqueig, i d'aquesta manera, les mestres podrien tenir més oportunitats d'argumentar. Aquestes activitats han estat triades per la formadora, per ser considerades bones, i s'han extret de *Nrich* (<https://nrich.maths.org/>) i *PuntMat* (<http://puntmat.blogspot.com/>). Encara que Boston (2013), en el seu qüestionari, primer demani que escullin el nivell de l'activitat i, després, que ho justifiquin, nosaltres hem volgut donar sempre bones activitats matemàtiques que servissin de models a les mestres i, per

aquest motiu, hem preguntat directament per què són bones activitats matemàtiques.

En la tercera part, les mestres han de posar-se a la pell de dos alumnes seus, un amb un nivell cognitiu alt i un altre amb un nivell cognitiu baix, i han d'intentar resoldre l'activitat i apuntar-ne les estratègies i idees matemàtiques. D'aquesta manera, poden endinsar-se realment en l'activitat, en poden fer una millor valoració i poden pensar quines ajudes o recursos haurien d'oferir a tots els nens i nenes. Creiem que és important que a part de la naturalesa de l'activitat pensin també en aspectes de la seva implementació, ja que, com hem definit anteriorment, depèn d'ambdues coses que una activitat matemàtica sigui bona o no.

Auto-avaluació de la pròpia activitat

En el M3, havien de fixar-se en la seva pròpia activitat, la qual havien preparat conjuntament les dues tutores del mateix curs i l'havien dut a terme amb els seus alumnes. Per aquest motiu, vam pensar que, en comptes de qüestionari, seria millor recollir les dades de l'activitat de la formació: una posada en comú on les dues mestres del mateix curs, tenint en compte que era per elles una bona activitat matemàtica, reflexionaven sobre aspectes positius de la seva activitat, aspectes negatius o a millorar i aspectes sobre els quals tenen dubtes. D'aquesta manera, igual que en els qüestionaris també és possible veure quines característiques creuen que ha de tenir una bona activitat matemàtica.

Per a recollir aquestes dades, es van repartir diversos *Post-it* de tres colors diferents. En els verds havien d'escriure els aspectes positius, en els blaus els negatius i en els roses els aspectes a millorar. A més, es van tenir en compte els registres en vídeo del moment de la posada en comú, per tal de recollir aquelles justificacions i argumentacions que explicitessin de manera oral, però no escrita, ja que en el *Post-it* ho escrivien resumidament.

Activitat redissenjada

En el M4, novament es van utilitzar les eines de la formació per a recollir les dades. En aquest cas, les mestres havien de redissenyar l'activitat que ja

havien implementat i valorat, tenint en compte els indicadors de bona activitat matemàtica que s'havien mostrat a la formació. Així doncs, es van recollir les dades a través d'una pauta senzilla de redisseny on apareixien tots els indicadors i les mestres havien de parlar sobre ells. D'aquesta manera és possible veure amb quin nivell de profunditat han entès cada indicador i, sobretot, quins consideren rellevants per a una bona activitat matemàtica.

Així doncs, els instruments que ens han permès recollir les dades principals han estat els **qüestionaris**, **l'autoavaluació de la pròpia activitat** i **l'activitat redissenada**. No obstant això, al llarg de la formació també s'han recollit altres dades secundàries, per a poder triangular la informació inferida de les dades principals.

En primer lloc, s'han gravat totes les sessions en vídeo i, a més, com que s'ha realitzat una observació-participant, també s'han pres notes de camp.

En segon lloc, en les classes de la fase 3 de la formació, les mestres han reflexionat sobre els elements matemàtics, el pensament matemàtic dels alumnes i el rol de la mestra. Aquestes reflexions les tenim recollides per escrit.

Per últim, una vegada finalitzada la formació i després d'una pre-anàlisi de les dades obtingudes en els instruments principals, s'ha realitzat una entrevista per a poder resoldre dubtes de les dades principals i triangular la informació. Aquesta, s'ha fet per cada cicle i s'ha estructurat en tres parts. En la primera part; s'ha preguntat sobre aspectes de la formació i el seu impacte, en la segona; sobre els indicadors en general i, en la tercera; s'ha aprofundit sobre aquells indicadors en què s'havien recollit dades confuses o incompletes.

4.2.4. Estratègia d'autoavaluació de la pròpia activitat i l'activitat redissenada

L'anàlisi de les dades recollides per aconseguir aquest 2n objectiu, s'ha realitzat a partir dels indicadors de bona activitat matemàtica (veure *Taula 4*), els quals han esdevingut les categories d'anàlisi. Per a la definició de les diferents dimensions o nivells de cada categoria, primer ens ha estat necessari una pre-anàlisi accelerada de les dades, la qual ens ha permès visualitzar de

quines maneres s'apliquen aquests indicadors a la pràctica i, per tant, quins nivells esdevenen a la realitat. Els nivells de les categories en què hi mancaven dades, no s'han pogut establir fins que aquestes dades s'han complementat amb els instruments secundaris. Així doncs, aquests nivells d'anàlisi s'han construït fonamentant-se tant en la teoria com en les dades (veure *Taula 3*).

Per exemple, en l'indicador de *diversitat i progressió de representacions i recursos adequats*, primer es va mirar què havien respost les mestres i, en funció de com es relacionaven aquestes respostes amb les idees amb què havíem caracteritzat l'indicador, es van definir els diversos nivells (veure *Taula 2*). Aquests, es van construir de manera progressiva, segons el nombre d'idees tingudes en compte i el seu grau de complexitat.

Nivell bàsic (N2)	<ul style="list-style-type: none">- el material és fàcilment manipulable.- les bales són fàcils d'aconseguir i per manipular també.- poden moure les bales d'una capsa a l'altra i veure maneres de fer.		
Nivell avançat (N3)	5	<div>DIVERSITAT I PROGRESSIÓ DE REPRESENTACIONS I RECURSOS ADEQUATS</div>	<p>Segons l'alumne/a:</p> <ul style="list-style-type: none">→ Manipulació amb el material.→ Representació / dibuix.→ Càlcul mental / algoritme.→ Numeració i comptatge. <p>També has de tenir material per a que cada alumne/a aporti lo que necessita.</p>
<p>Entrevista: "A mi m'ha agradat molt ser conscient de que els materials, que en tenim molts, no els hi has de posar per endavant, no a priori, el material es fa servir com a eina quan cal pels nens que ho necessiten, i això també et dóna altres mires per a fer el problema. Per exemple, el de nen que col·leccionava jo vaig posar caixes a la classe, caixes caixes, perquè depèn el nivell que tingui el nen es molt important això, igual que fer una plantilla. Tu els hi dones el material, però no els hi dius mira aquí teniu tot el material. No, si no, donar el material en el moment clau que s'ha de donar aquets material, perquè si no, és el que ens va dir un cop l'Edelmira, que comencen a jugar i aquí ja no fem. Llavors primer intentem llegir bé, fer-ho bé, i en el moment clau que toqui, donar aquell material. Llavors sí que manipulant arriben a aquelles conclusions."</p>			
Nivell sofisticat (N4)	5	<div>DIVERSITAT I PROGRESSIÓ DE REPRESENTACIONS I RECURSOS ADEQUATS</div>	<p>La representació pot iniciar-se de forma molt manipulativa amb elements mòbils però pot desenvolupar a dibuix i gràfic del collarèt, fins a conclusions de caire simbòlic.</p>

Taula 2. Els nivells d'anàlisi de l'indicador de diversitat i progressió de representacions i recursos adequats.

	NIVELL SOFISTICAT (N4)	NIVELL AVANÇAT (N3)	NIVELL BÀSIC (N2)	NIVELL NUL (N1)
OBERTURA	Identifica que l'activitat admet més X ð i b · W U a ‡ · d c g g] V ` Y accepta X] Z Y f Y b h g · h] d i g matemàtica i estratègies en els alumnes. Explicita que té el nivell de d U i h U · ^ i g h · d Y f · d f c desitjada i no brinda suggeriments possibles ni resultats a aplicar. També, que requereix que els alumnes: planifiquin el seu enfocament, desenvolupin processos rellevants com són la formulació de conjetures o la validació, ampliïn els seus coneixements i pensin de noves maneres.	Identifica que l'activitat admet a f g · X ð i b · W U a ‡ · d resolució i accepta diferents h] d i g · X ð U W h] j] estratègies en els alumnes. També, que requereix que els alumnes: planifiquin el seu enfocament, desenvolupin processos rellevants com són la formulació de conjetures o la validació, ampliïn els seus coneixements i pensin de noves maneres.	Identifica que l'activitat admet a f g · X ð i b · possible de resolució i accepta diferents tipus X ð U W h] j] h U h · estratègies en els alumnes.	No contempla aquest indicador.
REPTE	Identifica que l'activitat és un repte i n'explica alguna característica : suposa un desafiament , requereix un pensament complex i no algorítmic , implica un esforç cognitiu i demanda de temps , etc. A més, especifica que el nivell de repte ha de ser favorable , ja que ha de permetre generar c d c f h i b] h U h g · X ð U d i f els alumnes han de tenir l'oportunitat de desenvolupar el que saben i ampliar els seus coneixements.	Identifica que l'activitat és un repte i n'explica alguna característica : suposa un desafiament , requereix un pensament complex i no algorítmic , implica un esforç cognitiu i demanda de temps , etc.	Identifica el repte de l'activitat i el descriu .	No contempla aquest indicador.
GRADACIÓ DE DIFICULTATS	Pot identificar els coneixements previs necessaris per a la construcció de nous coneixements, però sobretot contempla els diferents ritmes X ð U d f Y b Y b h U h [Y i, X Y `	Pot identificar els coneixements previs necessaris per a la construcció de nous coneixements, però sobretot contempla els	Identifica els coneixements previs necessaris per a la construcció de nous coneixements.	No contempla aquest indicador.

	més, proposa una gradació de dificultats per tal que tots els alumnes esperin i puguin participar.	diferents ritmes X D U d f Y b Y b h U h [Y alumnes.		
CONTEXTUALITZACIÓ	Identifica que l'activitat provoca interès i/o curiositat als alumnes i que presenta un context significatiu i rellevant per a ells (intramatemàtic i/o extramatemàtic). A més, aporta exemples .	Identifica que l'activitat provoca interès i/o curiositat als alumnes i que presenta un context significatiu i rellevant per a ells (intramatemàtic i/o extramatemàtic).	Identifica que l'activitat provoca interès i/o curiositat als alumnes.	No contempla aquest indicador.
DIVERSITAT I PROGRESSIÓ DE REPRESENTACIONS I RECURSOS ADEQUATS	Identifica que es pot resoldre amb diferents representacions (manipulació, diagrames visuals, símbols...) i/o que inclou els recursos materials i temporals necessaris , perquè que cada infant utilitzi els que necessiti , segons el seu nivell de comprensió. També, entén que per passar a nivells més profunds de comprensió, g D \ U X D U b U f U representacions més concretes/manipulatives, cap a representacions més abstractes/simbòliques.	Identifica que es pot resoldre amb diferents representacions (manipulació, diagrames visuals, símbols...) i/o que inclou els recursos materials i temporals necessaris , perquè que cada infant utilitzi els que necessiti , segons el seu nivell de comprensió.	Identifica que inclou i/o que es pot resoldre amb diferents representacions (manipulació, diagrames visuals, símbols...).	No contempla aquest indicador.
CONTINGUTS CLAU	Identifica quins continguts o idees matemàtiques clau treballa l'activitat, és a dir, les més importantes , incloses en el currículum . També identifica que l'activitat promogui pràctiques disciplinàries importants, anàlogues als processos dels matemàtics . Per exemple, raonar a partir d'evidències, comunicar el pensament d'un mateix,	Identifica quins continguts o idees matemàtiques clau treballa l'activitat, és a dir, les més importantes , incloses en el currículum .	Identifica quins continguts treballa l'activitat.	No contempla aquest indicador.

	etc.			
CONNEXIÓ I APLICACIÓ DELS CONTINGUTS	Identifica relacions entre continguts , de la matemàtica i d' altres matèries , i la seva aplicació a altres aprenentatges o a vivències no escolars.	Identifica relacions entre continguts , de la matemàtica i d' altres matèries .	Identifica relacions entre continguts de la matemàtica .	No contempla aquest indicador.
ARGUMENTACIÓ	Identifica la importància de parlar g c V f Y ' ` U ' g c ` i W] q Œ' X Y, ' ` que els alumnes expliquin les seves estratègies i/o justifiquin el seu pensament al mestre o mestra i als altres alumnes (de manera oral i/o escrita). També explicita maneres per aconseguir-ho, com el treball en parelles o grups .	Identifica la importància de parlar sobre la solució de ` Ð U Whi p u e p h a l u n e s que els alumnes expliquin les seves estratègies i/o justifiquin el seu pensament al mestre o mestra i als altres alumnes (de manera oral i/o escrita).	Identifica la importància de parlar sobre la g c ` i W] Œ' X Y, ' ` però es queda més en la correcció que en ` Ð U f [i a Y j a q u e U W no especifica el fet que els alumnes hagin d'explicar les seves estratègies i hagin de justificar el seu pensament.	No contempla aquest indicador.
ANTICIPACIÓ DE CONTINGÈNCIES	Considera l' anticipació de contingències com una preparació del mestre o la mestra de l'activitat a tractar, on cal que es posi en la pell dels seus alumnes en enfrontar-se a la tasca. A més, identifica algun dels motius pel qual és important: permet la previsualització dels possibles errors i dificultats , la prevenció de les bones preguntes i intervencions docents apropiades , la preparació de recursos adequats , la facilitat en la identificació i la resolució els conflictes de significat que es puguin produir durant l'activitat, etc.	Considera l' anticipació de contingències com una preparació del mestre o la mestra de l'activitat a tractar, on cal que es posi en la pell dels seus alumnes en enfrontar-se a la tasca.	Considera l' anticipació de contingències com una preparació pels alumnes de l'activitat principal futura, on es tantegen els continguts que es treballaran.	No contempla aquest indicador.

GESTIÓ D'AULA	Pot incloure aspectes d'organització i participació d'aula, però sobretot considera que el mestre o la mestra \ U` X Đ] b h Y f j Y b] f ` U a adequades , més que amb explicacions, i que ha de trobar on estan els alumnes per abordar els malentesos emergents i donar-los oportunitats per aprofundir en la seva comprensió.	Pot incloure aspectes d'organització i participació d'aula, però sobretot considera que el mestre o la mestra ha X Đ] b h Y f j Y b] f ` U a adequades , més que amb explicacions.	Es centra en l' organització o la d U f h] W] d U W] α (treball en grup, en parelles...), però no en les intervencions de la mestra .	No contempla aquest indicador.
PROMOCIÓ CULTURA FORMATIVA DE L'AVUACIÓ	Valora la importància de l' autonomia i la iniciativa de l'alumnat i/o la despenalització del error i explica que l' error permet noves oportunitats X Đ U d f Y b Y ésh U h [Y autoregular-se . A més, exposa maneres d' empoderar -los.	Valora la importància de l' autonomia i la iniciativa de l'alumnat i/o la despenalització del error i explica que l' error permet noves oportunitats X Đ U d f Y b Y ésh U h [Y fonamental perquè els infants puguin autoregular-se .	Valora la importància de l' autonomia i la iniciativa de l'alumnat i/o la despenalització del error .	No contempla aquest indicador.
EQUITAT I IDENTITATS POSITIVES	Pot identificar que l'activitat promou la] [i U` h U h ` X Đ p d d t s h i b les alumnes , independentment del gènere , l' origen o la classe social , i especifica que els ofereix oportunitats per a construir una visió coherent, significativa i amb un valor positiu de les matemàtiques. També, que els permet millorar l' autoeficàcia , és a dir, el fet que es vegin a si mateixos i als altres com a poderosos pensadors i aprenents .	Pot identificar que l'activitat promou la igualtat X Đ c d c f h p e b a t o t s U b l s g les alumnes , independentment del gènere , l' origen o la classe social , i especifica que els ofereix oportunitats per a construir una visió coherent, significativa i amb un valor positiu de les matemàtiques.	Identifica que l'activitat promou la igualtat X Đ c d c f h p e b a t o t s U els i les alumnes , independentment del gènere , l' origen o la classe social .	No contempla aquest indicador.

Taula 3. Categories i } ã ç ^ | | • Á â q æ} e | ã • ã Á â ^ Á â æ â ^ •

4.2.5. Consideracions ètiques

En el disseny, en la recollida i l'anàlisi de les dades i, també, en la redacció del d'aquesta recerca s'han tingut en compte diversos aspectes ètics.

En primer lloc, sempre s'ha informat dels objectius de la recerca a les persones participants, inclús en els instruments de recollida de dades, en què hi apareixia una breu explicació sobre la recerca i la finalitat de l'instrument. En segon lloc, s'ha garantit l'anonimat dels noms, tant de les persones participants com de l'escola. En els instruments es demanava el nom, però especificant que era una dada confidencial que s'utilitzaria només en el marc d'aquesta recerca, per tal de poder fer-ne el seguiment. En tercer lloc, s'ha demanat permís pels enregistraments, tant de vídeo com d'àudio, i s'ha garantit, una vegada més, que només se'n faria ús per aquesta investigació. Per últim, ens hem compromès en compartir els resultats de la recerca amb les mestres participants.

5. Resultats i discussió

5.1. Resultats objectiu 1

A partir de les aportacions dels experts en didàctica de les matemàtiques, es van refinar alguns dels indicadors de bona activitat matemàtica obtinguts en l'anàlisi comparatiu de la *Taula 1*:

1. Oberta: El nom de l'indicador es va modificar a "obertura", per tal que fos un substantiu, com la resta d'indicadors. Es va canviar "no es troba molt pautada" per "té el nivell de pauta just per promoure l'activitat desitjada", ja que un expert va comentar que la pauta ha de dependre de les característiques de l'alumnat. També, es va reestructurar l'escrit, seguint la proposta d'una experta.

2. Repte: Es va afegir que el repte permet generar oportunitats d'aprenentatge, ja que un expert va comentar que si es presenta un repte i se supera, pel mig s'ha d'haver construït coneixement. Es va treure "per la majoria d'alumnes" i "conceptes difícils", ja que, tal com argumentaven alguns experts, eren conceptes que no quedaven ben definits. Es va millorar la redacció d'aquest indicador.

3. Gradació de dificultats: No es va canviar res, però se'n va millorar la redacció.

4. Contextualització: Es va afegir que el context pot ser tant intramatemàtic com extramatemàtic, ja que un expert va argumentar que també hi poden haver contextos intramatemàtics que facin que una activitat sigui interessant. Es va treure que "l'activitat permet connectar amb el context de fora de l'aula", ja que algunes expertes van justificar que hi ha conceptes que no es poden vincular amb el context de fora l'aula, sinó que només es poden abordar matemàticament, però que poden ser d'interès i estar a l'abast dels alumnes.

5. Diversitat i progressió de representacions i recursos adequats: Es va canviar la paraula "enactives" per "concretes", ja que un expert va especificar-

nos que l'abstracte s'ha d'anar incorporant a partir del concret i, a més, creiem que realment és una paraula amb una definició molt més coneguda i consensuada.

8. Argumentació: Es va afegir “explícitament”, ja que una experta va mencionar que en l'activitat s'ha de demanar explícitament als alumnes que argumentin els seus procediments o conclusions. A més, va afegir que l'argumentació pot ser tant oral com escrita, així que també es va incloure aquest aspecte sobre quina manera pot argumentar l'alumne/a.

9. Anticipació de contingències i gY g h] OE' XsD b d ecidit separar aquest indicador en dos de diferents, ja que un expert va comentar que era massa llarg per ser mesurat. En el d'anticipació de contingències es va incloure, tal com va suggerir un altre expert, que el fet d'anticipar també permet tenir recursos per quan apareguin els errors i les dificultats.

12. Valors, actituds, emocions i] X Y b h] h U h g ' d c gEs ha] cànYag ' U ' ` Ð U i el nom de l'indicador a “equitat i identitats positives a l'aula”. A més, també es va afegir l'equitat per origen.

Així doncs, atenent al primer objectiu d'aquesta recerca, s'han obtingut 12 indicadors d'una bona activitat matemàtica (veure *Taula 4*). Per a considerar que una activitat és bona, no s'espera que es compleixin tots els indicadors, ja que algun pot quedar fora dels objectius plantejats per la mestra, però sí que s'espera que es contemplin i s'apliquin la majoria.

1	OBERTURA	Admet a f g ' X Ð i b ' sWl a d e redutució i accepta X] Z Y f Y b h g ' h] d i g ' X Ð U Wh] j] l e U els alumnes. Té el nivell de pauta just per promoure ` Ð U Wh] j] h U h o b X n Y a g s u g e r i m e n t s possibles ni resultats a aplicar. Requereix que els alumnes: planifiquin el seu enfocament, desenvolupin processos rellevants com són la formulació de conjectures o la validació, ampliin els seus coneixements i pensin de noves maneres.
---	-----------------	---

2	REpte	Suposa un desafiament perquè requereix un pensament complex i no algorítmic , així com un esforç cognitiu i demanda de temps per a la resolució de l'activitat. El nivell de repte ha de ser favorable , ja que ha de permetre generar oportunitats X Ò U d f Y b Y b els alumnes han de tenir l'oportunitat de desenvolupar el que saben i ampliar els seus coneixements.
3	GRADACIÓ DE DIFICULTATS	Parteix dels coneixements previs i inclou una gradació de dificultats a partir de les possibilitats de cadascun dels alumnes, segons els diferents ritmes d'aprenentatge, amb la finalitat que tots puguin i esperin participar .
4	CONTEXTUALITZACIÓ	Presenta un context significatiu i rellevant pels alumnes (intramatemàtic i/o extramatemàtic), que els provoca interès i/o curiositat .
5	DIVERSITAT I PROGRESSIÓ DE REPRESENTACIONS I RECURSOS ADEQUATS	Inclou i/o es pot resoldre utilitzant diferents representacions (manipulació, diagrames visuals, símbols...), per tal que tots els alumnes puguin participar i desenvolupar nivells més profunds de comprensió. S'ha d' anar avançant de representacions més concretes/manipulatives, cap a representacions més abstractes/ simbòliques . Fer connexions entre múltiples representacions ajuda a construir significats. Per a aquest desenvolupament, es necessiten els recursos materials i temporals adequats .
6	CONTINGUTS CLAU	Requereix que els alumnes s'involucrïn amb les idees o continguts matemàtics més importants , inclosos en el currículum . A més, ha d'involucrar els alumnes en actuacions autèntiques de pràctiques disciplinàries importants, anàlogues als processos dels matemàtics . Per exemple, raonar a partir d'evidències, comunicar el pensament d'un mateix, etc.
7	CONNEXIÓ I APLICACIÓ DELS CONTINGUTS	Permet fer connexions entre continguts, de la a U h Y a { h] WU ' c ' X Ò, U` aplicat als altres , aprenentatges o a vivències no escolars.
8	ARGUMENTACIÓ	Requereix que, de manera explícita, els alumnes expliquin les seves estratègies i justifiquin el seu pensament al mestre o mestra i als altres alumnes (de manera oral i/o escrita). Per aconseguir-ho, és important el treball en parelles o grups.

9	ANTICIPACIÓ DE CONTINGÈNCIES	Inclou una anticipació dels errors i dificultats dels alumnes en enfrontar-se a la tasca per preveure intervencions docents apropiades, tenir recursos per donar suport quan apareguin i, també, reconèixer i resoldre els conflictes de significat que es puguin produir durant l'activitat.
10	; 9 G H = é ' 8 D	Durant l'activitat, el mestre o mestra ha d'intervenir a partir de preguntes adequades , més que amb explicacions, i ha de trobar on estan els alumnes (quines estratègies utilitzen, quina profunditat de comprensió tenen...) per abordar els malentesos emergents i donar-los oportunitats per aprofundir en la seva comprensió.
11	PROMOCIÓ CULTURA FORMATIVA DE @D 5 J 5 @I 5 7	Fomenta l' autonomia i la iniciativa de l'alumnat i permet l' autocontrol i l' autoregulació dels propis processos cognitius. Per aconseguir-ho, s'ha de X Y g d Y b U`] h n U fonsidera-la font d'aprenentatge i, també, empoderar als infants.
12	EQUITAT I IDENTITATS POSITIVES A @D 5 I @5	Ofereix als estudiants oportunitats per a construir una visió coherent, significativa i amb un valor positiu de les matemàtiques. Permet millorar l' autoeficàcia , és a dir, el fet que es vegin a si mateixos i als altres com a poderosos pensadors i aprenents . A més, promou igual d' oportunitats per a tothom , independentment del gènere, l'origen o la classe social.

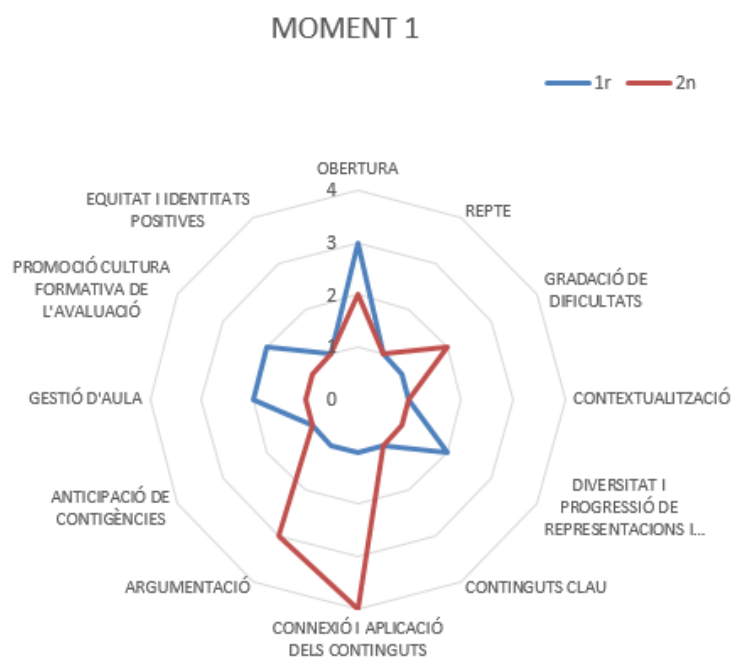
Taula 4È Á Q} â ã & æâ [/ • Á â q ~ } æÁ à [] æÁ æ& c ã ç ã c æc Á { æc ^ { e c á

5.2. Resultats objectiu 2

Per a poder identificar si s'han produït canvis respecte a la caracterització de bones activitats matemàtiques al llarg de la formació, s'ha mirat en cada un dels moments quants indicadors tenien en compte els dos grups de mestres i en quin nivell: sofisticat (N4), avançat (N3), baix (N2) o nul (N1). Per a visualitzar els canvis, s'ha utilitzat un gràfic radial per a cada moment, on apareixen tots els indicadors de bona activitat matemàtica amb el nivell obtingut per cadascun d'ells, diferenciat per cada grup de mestres.

Moment 1

En el Gràfic 1 es pot veure un patró gairebé circular amb la majoria d'indicadors al N1. Això vol dir que, a l'inici de la formació (M1), les mestres no consideraven els indicadors situats a aquest nivell, els quals són la majoria. Per tant, ambdós grups de mestres tenien en compte pocs indicadors i, aquests, en un nivell més aviat baix.



Gràfic 1. Les mestres de 1r i 2n en el M1

Les mestres de 1r van considerar en un N2 els indicadors especificats a continuació, ja que els van descriure de la següent manera:

- < *Diversitat i progressió de representacions i recursos adequats*: “El material és fàcilment manipulable”
- < *Facilita la interacció entre iguals*: “Es pot avaluar la competència 5 d’iniciativa i autonomia personal”
- < *Promoció cultura formativa de l’avaluació*: “Es pot avaluar la competència 5 d’iniciativa i autonomia personal”

També, van tenir en compte l'indicador d'*obertura* en un N3, explicat així: “L’activitat permet crear hipòtesis i comprovar-les. Permet múltiples solucions”.

Per altra banda, les mestres de 2n van arribar a un N2 en aquests dos indicadors:

- ◀ *Obertura*: “Hi ha moltes possibilitats, no hi ha una sola resposta. Ventall ampli de resposta”
- ◀ *Gradació de dificultats*: “Té en compte els coneixements previs”

També, a un N3 en l'indicador d'*argumentació*, ja que van dir el següent: “Els fem ser analítics; han de pensar i raonar la resposta”. I, per últim, a un N4 en l'indicador de *connexió i aplicació dels continguts*: “Té en compte la interrelació amb àrees. Poden trobar exemples en el seu entorn.”

Per tant, els punts de partida d'ambdós grups són força similars respecte al nombre d'indicadors contemplats i el nivell d'aquests, encara que les mestres de 2n comencessin en un nivell una mica més alt. No obstant això, pel que fa als indicadors considerats, sí que comprovem que és un punt de partida diferent, ja que cada grup n'ha tingut en compte uns, els quals són diferents dels de l'altre grup. Només coincideixen en l'indicador d'*obertura*.

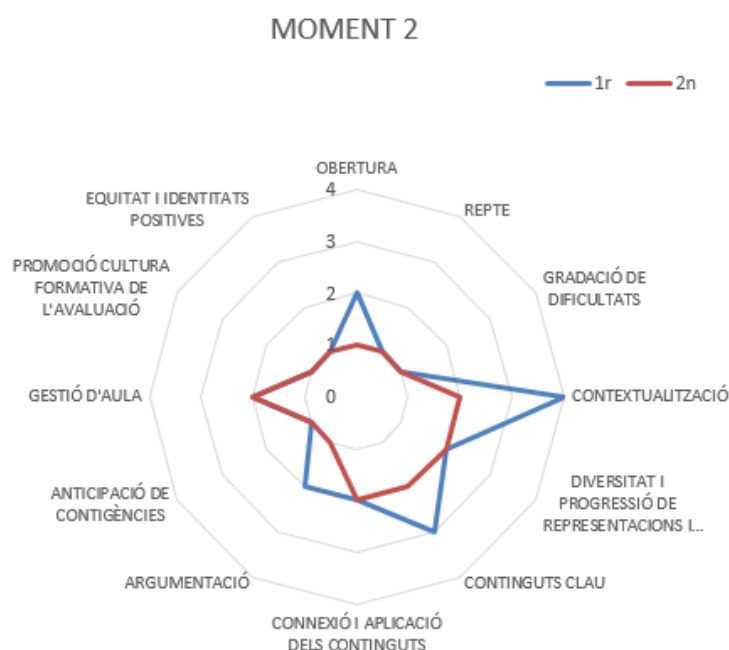
Moment 2

En el *Gràfic 2* podem observar com en el M2 encara hi havia bastants indicadors en un N1, la qual cosa ens indica que les mestres seguien sense contemplar força indicadors. No obstant això, sí que es pot veure que havien tingut en compte més indicadors que en el M1 i, aquests, en nivells més alts, majoritàriament en un N2. Aquest fet ens indica que les mestres van millorar respecte al M1 tant en nombre d'indicadors tinguts en compte, com en el nivell d'aquests, passant d'un nivell predominantment nul a un nivell bàsic.

En aquest moment, a diferència del M1, es pot veure més evolució per part de les mestres de 1r, ja que van considerar 5 indicadors en un N1, 5 en un N2, 1 en un N3 i 1 en un N4. En canvi, les de 2n van tenir en compte 7 indicadors en un N1 i 5 en un N2. Per tant, les de 1r van aconseguir menys nivells en un nivell nul i, a la vegada arribar en 2 indicadors als nivells més alts; a un N3 amb l'indicador de *continguts clau*, dient el següent: “Perquè per buscar la solució obliga a pensar en diferents opcions on intervé el càlcul”, i un N4 a l'indicador de *contextualització*: “Planteja un enigma. El tema de les col·leccions els hi

encanta i quan un alumne col·lecciona és meticolós i poden sortir comentaris molt particulars.”

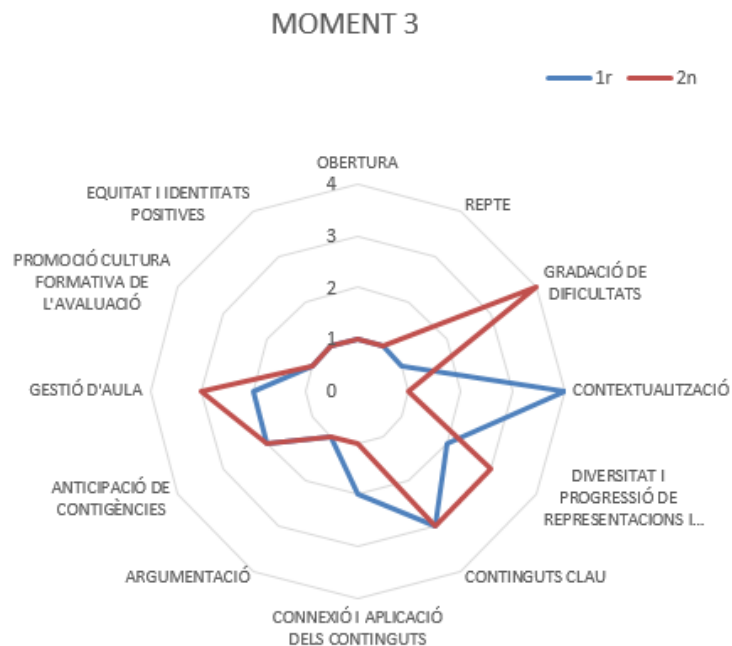
En aquest moment, podem veure que no hi havia gairebé diferències en els indicadors contemplats per cada grup, ja que tots els indicadors considerats per les mestres de 2n, també els havien tingut en compte les mestres de 1r, encara que les de 1r n'haguessin contemplat dos més. A més, els nivells de cada indicador eren força similars, ja que, excepte el de *contextualització*, en què hi havia una diferència de dos nivells, la resta coincidien en nivell o només hi ha una diferència d'un.



Gràfic 2. Les mestres de 1r i de 2n en el M2

Moment 3

En el *Gràfic 3* es pot comprovar com en el M3 encara hi havia alguns indicadors que no es contemplaven. Les mestres de 1r no tenien en compte 6 indicadors, un menys que abans, i les mestres de 2n; 7, els mateixos d'abans. Així doncs, el nombre d'indicadors contemplats va ser pràcticament el mateix que en el M2, encara que cal remarcar que les mestres de 1r n'havien deixat de considerar un. No obstant això, van incrementar el nivell dels indicadors tinguts en compte, assolint majoritàriament un nivell bàsic-avançat, tot i que també amb presència del sofisticat.



Gràfic 3. Les mestres de 1r i 2n en el M3

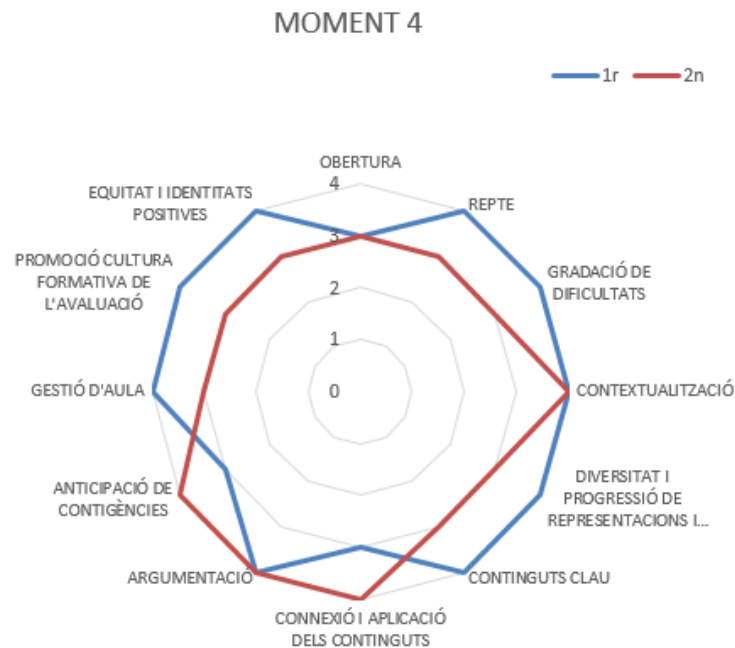
Les mestres de 1r van considerar 4 indicadors en un N2, un indicador en un N3 i, un altre, en un N4, concretament, el de *contextualització*, igual que en el M3, explicat així: “Propera i entenible pels alumnes: collarets, una venta, manipulable...”. Per altra banda, les mestres de 2n van demostrar un N2 en 1 indicador, un N3 en 3 i un N4 en 1, el qual correspon a l’indicador de *gradació de dificultats*: “Com a mestre has de dissenyar les activitats de tal manera que permeti treballar diferents nivells”

Comparant de nou ambdós grups, es pot observar que en el M3 hi va tornar a haver força similituds pel que fa al nombre d’indicadors contemplats, però diferències respecte al nivell d’aquests. Sobretot, es presenten dos casos extrems en els indicadors de *gradació de dificultats* i *contextualització*, en què un grup hi va aprofundir en un N1 i l’altre grup en un N4.

Moment 4

En el *Gràfic 4* podem visualitzar de nou una forma més aviat circular; el grup de 1r situat en el N4 i el de 2n en el N3. Així doncs, podem comprovar que en el M4 totes les mestres van tenir en compte la totalitat dels indicadors i, tots ells, en un nivell que va entre l’avançat i el sofisticat, és a dir, en nivells considerats

alts (es poden consultar totes les dades d'aquest moment a l'Annex 3. *Dades del moment 4 per cada indicador*). El fet que cap grup hagi fet un retrocés de nivell en algun dels indicadors i que, tant les mestres de 1r com les de 2n, hagin arribat, com a mínim, a un N3 en tots els indicadors; denota la gran evolució d'ambdós grups, sobretot de 1r.



Gràfic 4. Les mestres de 1r i de 2n en el M4

Pel que fa als nivells en què s'ha arribat a un nivell sofisticat, sí que hi ha força diferències, ja que els dos grups només han coincidit en el nivell d'assoliment dels indicadors de *contextualització* i *argumentació*, però és un fet que no resulta estrany si recordem que els punts de partida ja eren diferents en el M1, quant a quins indicadors es fixava cada grup de mestres. Aquest fet demostra que la formació ha donat eines perquè les mestres s'hagin pogut fixar i millorar en tots els indicadors, encara que després cada mestra o grup hagi destacat o prioritzat més uns que altres, probablement, depenent de la seva forma de ser i fer classe i de les característiques dels seus alumnes.

Per tant, es pot comprovar que al llarg de la intervenció formativa sí que s'han produït canvis respecte a la caracterització de bones activitats matemàtiques.

Es pot observar amb més claredat a la *Figura 5*, la qual permet visualitzar aquesta evolució.

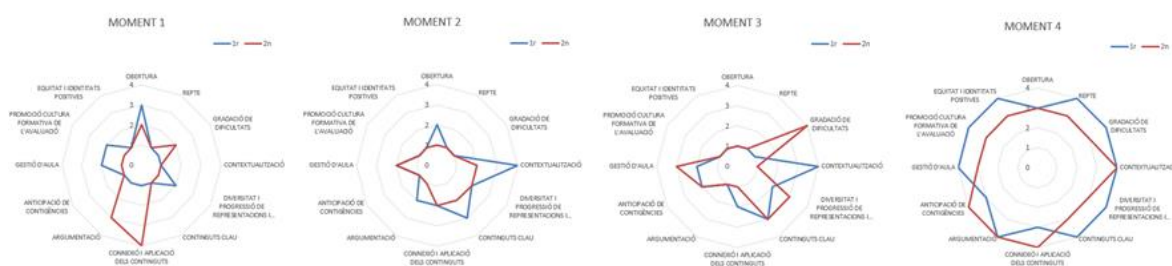
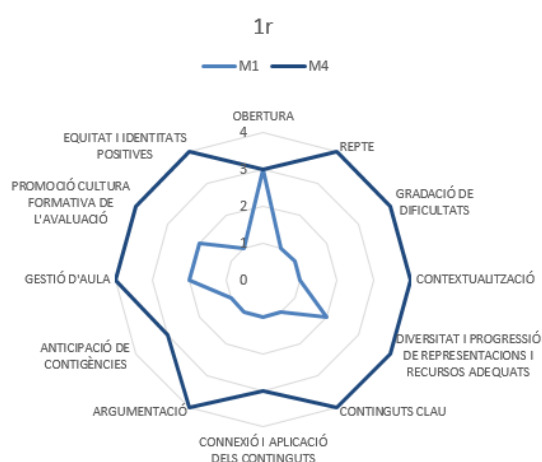


Figura 5

També permet observar que en la majoria dels indicadors els canvis han estat progressius, ja que s'ha anat aprofundint en el nivell a mesura que s'ha avançat en la formació (es pot veure millor a l'Annex 4. *Evolució de cada indicador en els 4 moments*). En són exemples els següents indicadors: *contextualització, diversitat i progressió de representacions i recursos adequats, continguts clau, anticipació de contingències i* *connexió i aplicació dels continguts*. En canvi, en els indicadors de *repte*, *equitat i identitats positives* i *gestió d'aula* el canvi no s'ha produït fins al final de la formació, és a dir, al M4.

En resum, hem identificat que s'han produït canvis en les mestres respecte a la caracterització de bones activitats matemàtiques, tant en les de 1r (Gràfic 5), com en les de 2n (Gràfic 6).



Gràfic 5. Comparació M1-M4 mestres de 1r



Gràfic 6. Comparació M1-M4 mestres de 2n

En ambdós gràfics podem veure que existeixen diferències entre l'inici de la formació (M1) i el final (M4), ja que en el M4 el polígon té una àrea molt més gran que en el M1 i està situat en nivells més alts, la qual cosa ens indica que s'ha produït coneixement. En el M1, quan les mestres pensaven en una bona activitat matemàtica, tenien en compte pocs indicadors i en un nivell baix. En canvi, en el M4, veien que hi havia més aspectes que s'han de tenir en compte perquè una activitat matemàtica sigui bona i van aconseguir un nivell més alt de domini de cadascun. Aquesta visió més global i profunda de tots els indicadors que s'han de tenir en compte és la que ens permet veure l'impacte de la formació.

Pel que fa a quins indicadors s'han desenvolupat més, podem veure que no hi ha homogeneïtat entre ambdós grups, ja que cadascun ha contemplat i ha desenvolupat en més profunditat indicadors diferents. Aquest fet probablement es produeix perquè els punts de partida de les mestres ja eren molt diferents.

6. Conclusions i limitacions de la recerca

Tant el marc del desenvolupament professional com el de les bones activitats matemàtiques són rellevants per a la millora del coneixement i de les competències professionals de les mestres i, consegüentment, de l'aprenentatge de l'alumnat. En aquesta recerca s'han contemplat ambdós de manera interrelacionada, per tal de veure si una experiència de desenvolupament professional permet que les mestres que hi participen millorin en la caracterització de bones activitats matemàtiques.

La conclusió més destacable, la qual respon al segon objectiu, és que **les mestres han canviat la seva caracterització de bona activitat matemàtica al llarg de la formació**. A l'inici de la formació tenien en compte pocs indicadors quan pensaven en una bona activitat matemàtica i els justificaven en un nivell baix. No obstant això, a mesura que s'ha anat avançant en la formació, s'ha comprovat que han anat evolucionant de manera majoritàriament progressiva fins a arribar a considerar tots els indicadors i en un nivell alt. En cap dels dos grups hi ha hagut un retrocés de nivell en cap dels indicadors i, com a mínim, s'ha arribat a un nivell avançat (N3) en tots, la qual cosa ens indica que **totes les mestres han pogut millorar en la caracterització de bones activitats matemàtiques**.

Pel que fa a cada indicador en concret, s'ha vist que no hi ha un patró respecte al fet de considerar un indicador o el seu nivell de justificació, ja que en cadascun dels moments en què s'ha recollit dades, s'ha comprovat que cada grup de mestres ha contemplat indicadors diferents o en diferent nivell de justificació. Inclús, en el moment 4, en què totes les mestres havien aconseguit un nivell alt, precisament els indicadors que un grup havia aconseguit en un N4, l'altre grup ho havia fet en un N3 i viceversa. Per tant, que una mestra tingui en compte uns indicadors determinats més que d'altres depèn de la seva manera de ser i de seva la pràctica docent. Per aquest motiu, el patró final no és homogeni per a totes les mestres, sinó que té a veure amb el punt de partida de cada mestra i de com li ha influenciat al formació.

Per altra banda, el fet de comprovar que s'ha arribat a un nivell alt en tots els indicadors -el qual oscil·la entre un N3 i un N4- i, també, que en tots els

indicadors, excepte el d'*obertura*, s'ha aconseguit un N4 en algun dels grups de mestres, ens denota que la formació realment ha donat eines perquè les mestres hagin pogut millorar en tots els indicadors. Així doncs, la intervenció formativa no s'ha centrat en uns indicadors concrets, sinó que ha procurat augmentar el nombre i el nivell d'indicadors tinguts en compte.

No obstant això, cal comentar que, probablement, els instruments no hagin permès identificar en cada moment tots els indicadors que les mestres realment tenien en compte o el nivell de justificació precís, donat que el que es pot recollir en els qüestionaris o en les activitats escrites és diferent de tot el que s'hagués pogut identificar en la discussió amb les mestres. Malgrat això, haver-ho fet d'una altra manera podria haver resultat inviable pel que fa al temps i, també, perquè podria haver estat feixuc per les mestres. Per sort, s'ha comptat amb registres de converses de les mestres o amb les entrevistes finals, les quals ens han permès complementar la informació, sobretot, del moment 4. Tot i això, hem considerat important remarcar el fet que els instruments hagin pogut ser una limitació de la recerca.

En segon lloc, partint de la primera conclusió, se'n pot extreure una altra d'important: **el treball dels mestres de primària ha millorat, concretament, en la caracterització de bones activitats.** Aquesta millora és important, ja que tindrà un impacte directe en la presa de decisions sobre el disseny, la posada en pràctica i l'avaluació d'activitats matemàtiques d'aquestes mestres i, per tant, en les oportunitats d'aprenentatge dels seus alumnes.

Cal comentar que aquesta recerca també ha recollit dades sobre quins aspectes de la formació tenen més a veure amb aquest impacte, tot i que finalment no s'han analitzat ni inclòs en aquest treball. No obstant això, igualment **pot aportar les característiques d'un formatiu en matemàtiques centrada, les quals poden esdevenir útils per a concretar programes formatius en didàctica de les matemàtiques per a mestres de primària** (veure *La intervenció formativa*).

Per altra banda, d'acord amb el primer objectiu, s'han produït i validat 12 indicadors que caracteritzen una bona activitat matemàtica (veure *Taula 4*), els quals ens han permès analitzar els resultats. Els indicadors són: (1) obertura, (2) repte, (3) gradació de dificultats, (4) contextualització, (5) diversitat i progressió de representacions i recursos adequats, (6) continguts clau, (7) connexió i aplicació dels continguts, (8) argumentació, (9) anticipació de contingències, (10) gestió d'aula, (11) promoció cultura formativa de l'avaluació, (12) equitat i identitats positives a l'aula. **Aquests indicadors són d'interès i rellevància, ja que poden esdevenir un recurs útil per a les aules, ja que poden servir per avaluar les seves activitats, per procurar que siguin bones.** Per tant, creiem que poden ser una possible aportació per a l'ensenyament.

En resum, s'ha comprovat l'**impacte positiu en el desenvolupament professional en la competència professional de les mestres participants, específicament, en la caracterització de bones activitats matemàtiques.** Partint d'aquest fet, podem afirmar que són essencials experiències d'aquest tipus perquè les mestres puguin anar actualitzant la seva competència professional docent i, consegüentment, que és necessària una continuïtat de la recerca que pugui seguir investigant altres experiències de desenvolupament professional o pugui focalitzar la mirada en altres destreses de la competència docent, per tal que les situacions d'ensenyament-aprenentatge de les aules puguin seguir millorant.

Bibliografía

Albarracín, L.; Badillo, E.; Giménez, J.; Vanegas, Y.; Villella, X. (2018). *Aprender a enseñar Matemáticas en la Educación Primaria*. Madrid: Editorial Síntesis.

Arcavi, A. (1999). ...Y en matemáticas, los que instruimos ¿qué construimos? *Números. Revista de didáctica de las matemáticas*, 38, 39-56.

Badillo, E. (2019). *Proyecto docente e investigador*. Documento inédito sin publicar. Universitat Autònoma de Barcelona.

Badillo, E., Moreno, I., & Planas, N. (2015). Aspectos metodológicos para el análisis del desarrollo profesional en matemáticas: el caso de una maestra de primaria. En R. Flores (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 28. México, D.F. Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C. (pp. 1400-1407). Barranquilla, Colombia.

Boston, M. D. (2013). Connecting changes in secondary mathematics teachers' knowledge to their experiences in a professional development workshop. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 16(1), 7-31.

Boston, M. D., Smith, M. S. (2011). *Implementing cognitively challenging mathematical tasks*. ZDM Mathematics Education, 43, 965-977.

Clarke, D., Roche, A., Cheeseman, J., & Van der Schans, S. (2014). *Teaching strategies for building student persistence on challenging tasks: Insights emerging from two approaches to teacher professional learning*. Mathematics Teacher Education and Development, 16(2), 46-70.

Creamat (2014). *Úl·lims nivells de qualitat*. Generalitat de Catalunya.

Fernández, C., Sánchez-Matamoros, G., Valls, J., & Callejo, M.L. (2018). *Prácticas y contextos*. AIEM-Avances de Investigación en Educación Matemática, 13, 39-61.

Fortuny, J.M., Rodríguez, R. (2012). *Aprender a mirar con sentido: facilitar la interpretación de las interacciones en el aula*. Avances de Investigación en Educación Matemática, 1, 23-37

Godino, J. D., Batanero, C., Font, V. (2007). *Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática*. ZDM: The International Journal on Mathematics Education, 39 (1-2), 127-135.

Llinares, S. (2012). *Construcción de conocimiento y desarrollo de una Mirada profesional para la práctica de enseñar matemáticas en entornos en línea*. AIEM. Avances de Investigación en Educación Matemática, 2, 53–70.

Llinares, S. (2013). *Ò| Á å ^ • æ! ! [| | [Á å ^ Á | æÁ & [{] ^ c ^ } &] ! [~ ^ • ã [} æ| { ^ } c ^ + Á | æÁ ^ } • ^ matemàtiques. Educació en Revista*, 50, 117–133.

Marçal, H., Kelso, F., Nogués, M. (2008). *Õ ~ ã æÁ] ^ ! Á æÁ | q g • Á } [Á • / llenguatge a la Universitat Autònoma de Barcelona*. Servei de Llengües i Observatori per a la Igualtat. Universitat Autònoma de Barcelona.

Moreno, I. (2017). *Conocimiento didáctico matemático de una maestra en un contexto de desarrollo del pensamiento numérico*. Memoria de Tesis Doctoral. Bellaterra: Universidad Autónoma de Barcelona.

National Council of Teachers of Mathematics. (2014). *Principles to actions: Ensuring mathematics success for all*. Reston, VA: NCTM

Planas, N i Alsina, À. (2009). *Educación matemática y buenas prácticas: infnatil, primaria, secundaria y educación superior*. Editorial Graó.

Pochulu, M., Font, V., Rodríguez, M. (2016). *Desarrollo de la competencia en análisis didáctico de formadores de futuros profesores de matemática a través del diseño de tareas*. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 19 (1), 71-98.

Ponte, J. P. (2012). *Estudiando el conocimiento y el desarrollo profesional del profesorado de matemáticas*. En N. Planas (Ed.), *Teoría, crítica y práctica de la educación matemática* (pp. 83–98). Barcelona: Graó.

Schoenfeld, A. H., the Teaching for Robust Understanding Project. (2016). *An Introduction to the Teaching for Robust Understanding (TRU) Framework*. Berkeley, CA: Graduate School of Education. Retrieved from

Shulman, L. S. (1987). *Knowledge and teaching: Foundations of the new reform*. Harvard Educational Review, 57(1), 1–21.

Smith, M. S., Stein, M. K. (1998). *Selecting and Creating Mathematical Tasks: From Research to Practice*. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 3, 344-50

Tejada, J. (2017). *Paradigmas y metodologías de investigación: De la pluralidad a la integración-complementariedad*. Extraído y ajustado de Jiménez, B. & Tejada, J. (2007). *Procesos y métodos de investigación*. En J. Tejada & Giménez, V. (Coords.). *Formación de Formadores. Escenario institucional*. (pp. 543-630). Madrid: Thomson

Annexos

Annex 1. Qüestionari moment 1

Màster de Recerca en Educació Científica i Matemàtica



QÜESTIONARI SOBRE TASQUES MATEMÀTIQUES

Aquest qüestionari està dissenyat amb finalitats de recerca, en el marc d'un treball de fi de màster, per tal d'investigar si la formació aconsegueix que les mestres millorin en la identificació de bones tasques matemàtiques.

T'agraïm molt que l'omplis, ja que és una eina que permetrà valorar l'impacte de la formació. Les dades personals són confidencials i s'utilitzaran només en el marc de la recerca. El nom és necessari per poder fer el seguiment en els diversos instruments. En finalitzar la recerca, compartirem amb vosaltres els resultats de l'anàlisi i les millores que incorporariem en el disseny de futures formacions.

1. DADES PERSONALS

Nom:

Data:

Experiència docent: ☐ Menys de 5 anys ☐ Entre 5 i 10 anys ☐ Més de 10 anys

Quins tipus d'activitats són més freqüents en les teves classes de matemàtiques?

2. PRESENTACIÓ DE LES TASQUES MATEMÀTIQUES

TASCA 1: Torres amb cubs

Quantes maneres diferents hi ha de fer torres de diferent alçada amb 10 cubs?



TASCA 2: Els animals de Noè

En Noè va veure els animals que entraven dins l'arca. Estava comptant les potes dels animals i pel migdia va arribar a 12.

- Quants animals creieu que va veure en Noè? Podeu trobar altres respostes?
- Trobeu alguna relació? Expliqueu-la.



3. ANÀLISI DE LES TASQUES MATEMÀTIQUES

TASCA 1: Torres amb cubs

Per què creus que és una **bona tasca matemàtica**?

Quina seria la **resposta** de la tasca que faria un **infant de la teva classe amb nivell de comprensió alt**?

Quines **idees matemàtiques i/o estratègies** caracteritzen aquesta resposta? Menciona les possibles **potencialitats i/o dificultats**.

Quina seria la **resposta** de la tasca que faria un **infant de la teva classe amb nivell de comprensió baix**?

Quines **idees matemàtiques i/o estratègies** caracteritzen aquesta resposta? Menciona les possibles **potencialitats i/o dificultats**.

TASCA 2: Els animals de Noè

Per què creus que és una **bona tasca matemàtica**?

Quina seria la **resposta** de la tasca que faria un **infant de la teva classe amb nivell de comprensió alt**?

Quines **idees matemàtiques i/o estratègies** caracteritzen aquesta resposta? Menciona les possibles **potencialitats i/o dificultats**.

Quina seria la **resposta** de la tasca que faria un **infant de la teva classe amb nivell de comprensió baix**?

Quines **idees matemàtiques i/o estratègies** caracteritzen aquesta resposta? Menciona les possibles **potencialitats i/o dificultats**.

Comentaris, suggeriments, dubtes, etc. sobre el qüestionari:

Moltes gràcies per la teva participació!

Annex 2. Qüestionari moment 2

Màster de Recerca en Educació Científica i Matemàtica



QÜESTIONARI SOBRE TASQUES MATEMÀTIQUES

Aquest qüestionari està dissenyat amb finalitats de recerca, en el marc d'un treball de fi de màster, per tal d'investigar si la formació aconsegueix que les mestres millorin en la identificació de bones tasques matemàtiques.

T'agraïm molt que l'omplis, ja que és una eina que permetrà valorar l'impacte de la formació. Les dades personals són confidencials i s'utilitzaran només en el marc de la recerca. El nom és necessari per poder fer el seguiment en els diversos instruments. En finalitzar la recerca, compartirem amb vosaltres els resultats de l'anàlisi i les millores que incorporariem en el disseny de futures formacions.

1. DADES PERSONALS


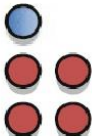
Nom:

Data:

2. PRESENTACIÓ DE LA TASCA MATEMÀTICA

TASCA 3: BALES

El meu amic col·lecciona bales de dos colors i les posa en caps de la següent manera:

				
Capsa 1	Capsa 2	Capsa 3	Capsa 4	Capsa 5
3	5			

- Quantes bales posarà en la capsa 3? De quina forma les col·locarà?
- Quantes bales posarà en la capsa 5? De quina forma les col·locarà?
- Si en una capsa hi ha 11 bales en total, quina capsa serà? Explica al teu company o companya com ho has fet.

3. ANÀLISI DE LA TASCA MATEMÀTICA

Per què creus que és una **bona tasca matemàtica**?

Quina seria la **resposta** de la tasca que faria un **infant de la teva classe amb nivell de comprensió alt**?

Quines **idees matemàtiques i/o estratègies** caracteritzen aquesta resposta? Menciona les possibles **potencialitats i/o dificultats**.

Quina seria la **resposta** de la tasca que faria un **infant de la teva classe amb nivell de comprensió baix**?

Quines **idees matemàtiques i/o estratègies** caracteritzen aquesta resposta? Menciona les possibles **potencialitats i/o dificultats**.

Comentaris, suggeriments, dubtes, etc. sobre el qüestionari:

Moltes gràcies per la teva participació!

Annex 3. Dades del moment 4 per cada indicador

1. Obertura

Nivell avançat (N3):

< 1r:

1	OBERTURA	Admet més d'un camí possible: dos colors combinats (2-8) o (4-6). Poden fer conjetures i formular hipòtesis sobre la combinació numèrica.
---	----------	--

< 2n:

1	OBERTURA	<p><i>No perdre la connexió</i></p> <p>La torre té un cert grau d'obertura; utilització o no de material manipulatiu, ampliació amb propostes diferents segons el nivell d'abstracció del nen (proposar capses que no sorten al problema).</p> <p>Es podria millorar el grau d'obertura fent als nens inventar l'enunciat d'un problema semblant.</p> <p>Utilitzar els multicubs si ho necessiten → numicom</p>
---	----------	---

2. Repte

Nivell avançat (N3):

- < 2n: "Un repte és fer pensar als nens, completament, o sigui sortir-te de les coses mecàniques i fer que el nen connexioni diferents continguts... Quan els hi poses un problema que tot ell és un repte, els veus allà tot capficats... No tenir pressa, no voler-ho fer tot en una sessió, és impossible."

Nivell sofisticat (N4):

- < 1r: "Jo veig el repte més per la dificultat que planteja el problema. És important per saber en quin nivell t'estàs movent i poder demanar un repte més alt o més baix, independentment del curs que estiguis, segons les necessitats de l'aula o dels nens, o un problema que tingui molts reptes possibles, per mi, segons nivells de dificultat, doncs fantàstic, no? Així tothom pot fer."

3. Gradació de dificultats

Nivell avançat (N3):

< 2n:

3	GRADACIÓ DE DIFICULTATS	Hi ha possibilitats de diferents ritmes d'aprenentatge. Tots els alumnes participen i s'autoregulen. També, treball cooperatiu, i, amb el paper, individual.
---	-------------------------	--

Nivell sofisticat (N4):

- < 1r: "En el cas de la meua classe, com tinc els que tinc, potser la gradació de dificultats i com afrontes la diversitat dins l'aula, per mi és molt important. Que el problema o el que plantegis a fer, tingui molts nivells, moltes possibilitats, a l'abast de tothom, que tothom pugui participar. Que puguis veure o partir de diferents llocs per a arribar."

4. Contextualització

Nivell sofisticat (N4):

< 1r:

4	CONTEXTUALITZACIÓ	L'activitat és presentada en un context conegut (collarets per a una fira) amb l'interès de confeccionar els collarets proposats.
---	-------------------	---

< 2n:

4	CONTEXTUALITZACIÓ	L'activitat és contextualitzada, fent una col·lecció amb una temàtica determinada. Cadascú explica els seus coneixements previs sobre el tema. Parlen de les coses que col·leccionen i com les organitzen. (Calburs, coscos, capsetes, carpeta.)
---	-------------------	--

5. Diversitat i progressió de representacions i recursos adequats

Nivell mitjà (N3):

- < **2n:** "A mi m'ha agradat molt ser conscient de que els materials, que en tenim molts, no els hi has de posar per endavant, no a priori, el material es fa servir com a eina quan cal pels nens que ho necessiten, i això també et dóna altres mires per a fer el problema. Per exemple, el de nen que col·leccionava jo vaig posar caixes a la classe, caixes caixes, perquè depèn el nivell que tingui el nen es molt important això, igual que fer una plantilla. Tu els hi dones el material, però no els hi dius mira aquí teniu tot el material. No, si no, donar el material en el moment clau que s'ha de donar aquets material, perquè si no, és el que ens va dir un cop l'Edelmira, que comencen a jugar i aquí ja no fem. Llavors primer intentem llegir bé, fer-ho bé, i en el moment clau que toqui, donar aquell material. Llavors sí que manipulant arriben a aquelles conclusions."

Nivell sofisticat (N4):

- < **1r:**

5	DIVERSITAT I PROGRESSIÓ DE REPRESENTACIONS I RECURSOS ADEQUATS	La representació pot iniciar-se de forma molt manipulativa amb elements mòbils però pot desenvolupar a dibuix i gràfic del collaret, fins a conclusions de caire simbòlic.
---	--	--

6. Continguts clau

Nivell mitjà (N3):

- < **2n:**

6	CONTINGUTS CLAU	<ul style="list-style-type: none">• Numeració• Comptar 2 amb 2 / doble.• Parelles / Senaris• Patrons (*) Important.• Percepció espacial.
---	-----------------	--

Nivell sofisticat (N4):

< 1r:

6	CONTINGUTS CLAU	Introdueix continguts matemàtics com, nombres parells i senars, orientació espacial respecte a la simetria, combinació d'elements per crear models diferents, descomposició del 10. És necessari que l'alumne/a pugui argumentar i raonar les seves evidències.
---	--------------------	---

7. Connexió i aplicació dels continguts

Nivell avançat (N3):

< 1r:

7	CONNEXIÓ I APLICACIÓ DELS CONTINGUTS	La simetria pot ser un concepte present en altres matèries, a més a més de poder afavorir en l'aprofundiment de l'esquema corporal.
---	---	---

Nivell sofisticat (N4):

- < 2n: "Noto que ara tinc més sistematitzat tots els problemes competencials, que aquí està tot lligat... sóc més conscient que tots els continguts estan lligats... Aquella activitat concreta era molt de mates, no sempre es donen totes les condicions, a mi particularment em va agradar molt més l'activitat dels insectes que havien d'interrelacionar no només continguts matemàtics, sinó també coneixement del medi."

8. Argumentació

Nivell sofisticat (N4):

< 1r:

8	ARGUMENTACIÓ	L'activitat permet i de fet es veu afavorida si es fa treball en parella, pot derivar a individual, però sempre requereix la justificació per part dels alumnes de l'estratègia utilitzada.
---	--------------	---

< 2n:

8	ARGUMENTACIÓ	Al final de l'activitat es fa una parada en comú de les estratègies que han fet servir. Al fer treball cooperatiu s'autoregulen i s'argumenten entre ells.
---	--------------	---

9. Anticipació de contingències

Nivell avançat (N3):

- < 1r: Anticipar nosaltres que podria passar i que no sé que és important. És difícil perquè he de saber jo a que m'estic enfrontant... si anem per aquí podré fer això, si anem per allà podrem fer això. Crec que perquè nosaltres estem tranquil·les, hem de controlar una miqueta, malgrat deixem via lliure eh. Però ho fem poc perquè clar, després no saps, quan entres a l'aula, es quan veus coses com: ostres, això se m'ha passat per alt i no ho havia tingut en compte. Tot no ho podem controlar, evidentment, però sí que és veritat que pots anticipar que, segons quin problema, on anem amb aquest problema a l'aula, no? O, segons quin objectiu d'allò, ui, pel nivell que tinc a la classe, pels alumnes que tal, tenir una mica en compte que sigui una cosa o un problema adequat a tots i que tots puguis treure una mica de tots. Si que això ho preveus abans... fins i tot l'aula, la situació, el material que portaràs, si serà maco, si no se què...

Nivell sofisticat (N4):

- < 2n: "Significa què és el que pot passar davant d'aquest problema. Preparar-te molt bé tu. Que és el que dèiem a la classe model, no? Preparar-te totes les situacions possibles que es poden donar, per tenir-les controlades. I sabent que podria passar, que és el que tu has de fer i el material, sempre i quan sigui necessari en aquell moment, perquè, si no és necessari, no s'ha de tenir."

10. Y g h] Œ' X Ð U i ` U'

Nivell avançat (N3):

< 2n:

10	GESTIÓ D'AULA	<ul style="list-style-type: none"> • Distribució d'alumnes en grups de 4 alumnes amb material preparat a la taula i fotocòpia del full del problema individual. • Lectura col·lectiva del problema. • La mestra fa preguntes individuals durant el procés.
----	---------------	---

Nivell sofisticat (N4):

< 1r:

10	GESTIÓ D'AULA	La mestra ha de circular per l'aula per observar i preguntar sobre el que els alumnes fan, o demanar que els alumnes argumentin ajudant-los amb preguntes que els qüestionin el que han fet.
----	---------------	--

11. D f c a c W] Œ' Wi ` h i f U' Z c f a U h] j U' X Y ` ` Ð U j U' i U W] Œ'

Nivell avançat (N3):

< 2n:

11	PROMOCIÓ CULTURA FORMATIVA DE L'AVALUACIÓ	Veure l'errada de l'alumne com una oportunitat de fer una bona pregunta (mestra) per reconduir i reflexionar. També, veure l'errada entre ells i autoregular-se.
----	---	--

Nivell sofisticat (N4):

< 1r:

11	PROMOCIÓ CULTURA FORMATIVA DE L'AVALUACIÓ	Es potencia l'assaig-error com a base de l'aprenentatge, per tant, l'alumne/a regula la seva pròpia activitat. Mai es formula "està malament", sempre es qüestiona el resultat per enriquir i confrontar el pensament.
----	---	--

12. 9 e i] h U h '] '] X Y b h] h U h g ' d c g] h] j Y g ' U ' ` Ð U i ` U

Nivell avançat (N3):

- < 2n: "Els agrada perquè els fa sortir del que és o del que tenen preestablert que és la matemàtica: avorrida, mecànica. Pels reptes i per com ho fem no estem caient de quatre potes a l'avorriment. Si ja no veuen la matemàtica com algo avorrit penses: bueno, alguna cosa estarem fent bé no?... Més et demanen també amb el seves actituds i verbalment moltes vegades, o sigui, ells mateixos ja s'estan motivant per fer aquella tasca una mica més... s'ho passen bé. I van introduint preguntes noves que surten d'ells."

Nivell sofisticat (N4):

- < 1r: "A mi m'agrada molt el tema que l'alumne se senti com que no està treballant matemàtiques, sinó que és un conte que li has explicat i d'aquí ha de sortir la contextualització i fer que el vegin d'una manera maco, a mi m'agrada molt... Abans era molt doncs vengà vengà, va, i doncs vengà fins que han d'arribar el resultat i ara no es hem d'arribar aquí, si no, com arribem? I cadascú que arribi on hagi arribat i al final t'adones que no hi ha una resposta única, que el de l'altre també és una resposta molt bona... jo amb això m'he sentit més relaxada i crec que els nens també, perquè és una manera que tothom està representat, no? És una manera de dir: jo dic la meua i ningú se'n riu. Són diferents visions no? Tot i que després sempre busques la més econòmica o la més productiva, diguem-ne pràctica. Nens que mai se'ls escoltava perquè ui, o ells mateixos no volien dir una resposta perquè veien una resposta única i si dic l'altra llavors s'ha acabat, o el "si no ho sé", ja no hi és això no? I, fins i tot, el que es pensava que tenia la resposta sueprcorrectíssima, s'adona que l'altra també és xula no? Doncs sí. Fer una continuïtat d'això al final pot relaxar també els alumnes de que no hi hagi aquest: doncs jo sé més en mates i tu menys, sinó que tothom en sap, eh?"

Annex 4. Evolució de cada indicador en els 4 moments

